

Ádám András - Dömösi Pál: Kalmár László,
Műszaki Nagyjaink VI. kötet, (1986), 51-89.

Ebben a csoportban ez a legterjedelmesebb
cikk, mely Kalmár László teljes életművét
fogja át. Jelentős irodalomjegyzéket
tartalmaz.

*Kalmár László egyetemi tanár. A mate-
matikai logika és a számítástudomány
kiemelkedő művelője*

I. Bevezetés

A matematika szabatos megalapozására irányuló törekvések a XIX. század folyamán két nagy jelentőségű — egymással élénk kölcsönhatásban álló — matematikai ágat hoztak létre: a halmazelméletet és a matematikai logikát, amelyeket „a matematika alapjai” összefoglaló névvel is szokás illetni.¹

A magyar tudósok között kezdettől fogva előfordultak olyanok, akik szerepet játszottak a matematika alapjainak kiépítésében. Voltaképpen már Bolyai János korszakalkotó geometriai kutatásainak megvolt az ilyen irányú hatása azáltal, hogy az axiomatikus módszer mibenlétével, korlátaival és kifutási lehetőségeivel kapcsolatos kérdések felé terelték a matematikusok figyelmét. A matematika alapjainak élénk hazai művelése azonban csak jóval később, *König* Gyula (l. [C. 12]) kutatásaival indult meg, majd az 1920-as években az akkoriban többnyire Németországban működő *Neumann* János (l. [C. 2]) foglalkozott behatóan ilyen kérdésekkel. Mind *König*, mind *Neumann* ide vágó munkássága inkább a halmazelmélet, mint a matematikai logika körébe tartozik.

A matematika alapjai iránti itthoni érdeklődés *König* Gyula halála után átmenetileg alábbhagyott, egészen addig, amíg kb. 1930-tól kezdődően *Péter* Rózsa (1905—1977) és Kalmár László ilyen irányú munkássága új fellendülést nem hozott.

- 1 E tudományágak kibontakozása a XIX. század derekától a XX. század elejéig főként Augustus de Morgan, George Boole, Charles S. Pierce, Ernst Schröder, Georg Cantor, Gottlob Frege, Henri Poincaré, Giuseppe Peano, Alfred N. Whitehead, David Hilbert, Ernst Zermelo és Bertrand Russell munkásságának köszönhető. (Felsorolásukban a születés időrendjét követtük.)

II. Személyes jellemzés

1. Főbb életrajzi adatok

Kalmár László 1905. március 27-én született a Somogy megyei *Alsóbogát-pusztán*,² többgyermekes uradalmi intéző fiaként. Mivel apja csakhamar állást változtatott, gyermekéveit Sárszentágotán³ töltötte. Itt végezte el az elemi iskola osztályait, majd Budapesten volt az I. kerületi állami gimnázium diákja, azután (1922 és 1927 között) a Pázmány Péter Tudományegyetem matematika—fizika szakos hallgatója. Szüleit korán elvesztette (apját 9 éves korában, anyját a gimnáziumi évek végén), ezért diákéveiben anyagi rászorultságból rendszeresen végzett óraadást magántanítványok részére. Felsőbb gimnáziumi éveiben tanára volt *Dávid* Lajos, a neves matematikátörténész; egyetemi tanulmányai alatt *Fejér* Lipót és *Kürschák* József professzorok hatottak rá leginkább. Hallgató korában a hírneves Eötvös József kollégiumnak volt tagja, amely csak jó képességű diákokat fogadott falai közé, és ahol élénk közösségi, kulturális és tudományos élet folyt.

Miután egyetemi tanulmányait befejezte és ezzel egyidejűleg doktori címet is szerzett, Kalmár László 1927. őszén munkásságának élethossziglani színhegyére: a szegedi egyetemre került. Kezdetben az *Ortvy* Rudolf vezetése alatt álló elméleti fizikai tanszéknek volt tanársegéde, minthogy a matematikai tanszéken nem volt szabad állás. Már a húszas évek végén részt vett a matematikai tárgyak oktatásában a szegedi polgári iskolai tanárképző főiskolán és az egyetemen; 1930-ban pedig adjunktusi állást kapott az egyetem (később a Bolyaiakról elnevezett) matematikai intézetében. Itt kezdetben Haar Alfréd, később Riesz Frigyes tanszékén tevékenykedett. Még 1929-ben döntő indítékokat hozott számára göttingeni tanulmányútja; ott-tartózkodása során ragadták meg érdeklődését a matematikai logika kérdései, és Göttingenben a kor jónéhány nagy matematikusának — sorukban a nagyok között is kimagasló *David Hilbert*nek — személyes közelségében, az elmélyült kutatómunka légkörében gyarapíthatta tudását.

A szegedi egyetemen 1932-ben magántanárrá habilitálták az aritmetika és analízis tárgyköréből; 1945-ben nyilvános rendkívüli, 1947-ben nyilvános rendes egyetemi tanári kinevezést kapott a felsőbb mennyiségtani tanszékre.

(Tanszékét később „matematikai analízis”, majd „a matematika alapjai és számítástechnika”, 1971-től „számítástudományi” tanszéknek nevezték.) Emellett 1957-től kezdve kutatóintézeti csoportot majd osztályt vezetett, 1963-tól az egyetem kibernetikai laboratóriumának is vezetője volt.

2 Kaposvártól kb. 20 km-re északra fekvő település, amely közigazgatásilag Edde községhez tartozik.

3 Székesfehérvár és Sárbogárd közötti község, az utóbbihoz közelebb.

52

A Magyar Tudományos Akadémia 1949-ben választotta levelező, 1961-ben rendes tagjává.

1975-ben nyugalomba vonult. Ez csak annyiban módosította életét, hogy mérséklődtek adminisztratív teendői; tudományos és oktatói tevékenységét élete utolsó órájáig változatlan odaadással folytatta. 1976. augusztus 2-án érte a hirtelen halál az Akadémia mátraházi üdülőjében, amelyet évtizedek óta minden nyáron felkeresett, nem annyira pihenés, mint inkább zavartalan alkotómunka végett.

A Szeged városa által adományozott dízsírhelyre temették el a várostól nyugatra eső ún. belvárosi temetőben.

2. Tudósi és emberi egyénisége

Kalmár László a legkorábbi gyermek éveiben is számos jelét adta különleges szellemi képességeinek. Négyéves korában tudott írni, olvasni és számokkal alpműveleteket végezni; szüntelen érdeklődése folytán magatartása annyira elütött a hasonló korú gyerekek szokásos viselkedésétől, hogy már ötéves korában (1910 őszén) beadták a falusi elemi iskolába, és ott rögtön a második osztályba vették fel. (Amint apja kifejezte magát: azért kellett idő előtt iskolába adni, hogy ott *butítsák* egy kissé.)

Az első gimnáziumi években a latin nyelv volt a kedvenc tantárgya. Amikor azonban megismerkedett az algebrával, érdeklődésének középpontjába a matematika került. Negyedik osztályos korában jutott hozzá *Beke* Manónak a IV.—VIII. osztályok algebrai anyagát összefoglaló tankönyvéhez, és egyetlen délután végigolvasta azt. Ugyanebben az időszakban eredményesen tanulmányozta *Cesàro* [C. 3] munkáját (egy komoly tudományos könyvet) is. Amikor később tanára, *Dávid* Lajos könyvtárát áttekinthette, ámulattal látta, mennyi matematikai könyv létezik. Azt, amely *Dávid* könyvei közül a legjobban érdekelte volna, — *Landaunak* a törzsszámokról írt kétkötetes [C. 7] munkáját — tanára csak érettségi után volt hajlandó kölcsönadni neki, tartva attól, hogy a nehéz könyv tanulmányozása nem egyeztethető össze a diák iskolai kötelezettségeivel. *Dávid* Lajos alapos okkal aggódott: a hetedik osztályos Kalmár öt tárgyból is elégségesre állt; egyrészt a matematikában való szenvedélyes elmélkedés vontatta el a más iellegű tárgvak tanulmányozásától, másrészt személynél

körülményei⁴ sem kedveztek a jó iskolai munkának. A nyolcadik osztályban aztán nekifogott a rendszeres tanulásnak, és sikerült kitűnően érettségiznie.

„Amikor a budapesti egyetemre került, már évfolyamtársainak mestere volt” — emlékezik vissza Péter Rózsa [B. 13]. „Én is évfolyamtársa voltam; ennek köszönhetem, hogy matematikus lettem. Akkor még nem jelent meg *Pólya* és *Szegő* kitűnő könyve, amely feladatokban dolgozza fel az analízis je-

4 Édesanyja gyógyíthatatlan betegsége; távolmaradás az iskolai oktatástól elhúzódozó svájci tartózkodása miatt, ahová gyermek-üdültetési akció révén került.

lentős részét; a mi évfolyamtársainknak Kalmár volt az eleven «Pólya—Sze-gő»-je. A körülötte csoportosuló, érdeklődő hallgatókkal feladatsorozatokban dolgoztatta fel a matematika különböző területeit.” (V. ö. [C. 10])

Az a kép, amit Péter Rózsa a fiatal Kalmárról rajzolt, tudósi magatartásának egy olyan oldalára világít rá, amit egész életén át változatlanul megőrzött. A matematikusok többségének tevékenységében az képezi a legjelentékenyebb oldalt, hogy a dolgozószoba csöndjében foglalatosságnak a tudományos kérdésekkel; a nyilvános szereplés — ha szükség van is rá — általában csak másodlagos szerepet játszik.⁵ Kalmár László egyénisége elütött ettől a típustól. A személyes szakmai kapcsolatokra — akár kötött keretek között, akár kötetlen jelleggel — roppant sok energiát fordított egész életén át. Az a hatás, amelyet ilyen közvetlen kapcsolatok révén gyakorolt a magyar matematikai (és egyéb tudományos) életre, jelentőségében nem sokkal marad el publikált oeuvre-je mögött.

Lelkes pedagógus volt, és vérbeli közéleti ember. Sem egyetemi óráin, sem tudományos előadásában nem szorítkozott arra, hogy tömören közölje a kiforrott, leszűrt eredményeket; hanem éreztette az azokhoz vezető — olykor vargabetűkbe bonyolódó — előkészítő megfontolásokat is. Arra törekedett, hogy a hallgató is váljon részesévé a felfedezés izalmának, és az egyetlen kitaposott úton való végighaladás helyett hadd tapasztalja ki a kutatóra leselkedő mellékutak, zsákutcák elkerülésének módját.

Olyan ember volt, akiben erősen él az igény arra, hogy eleven kapcsolatot tartson az eseményekkel, aktívan részt vegyen a napirenden levő problémák megoldásában, az ügyek intézésében, — röviden: hogy benne legyen az élet sűrűjében. Tevékenyen közreműködött a legkülönbözőbb jellegű bizottságok, értekezletek munkájában;⁶ rögtönzésszerűen ható, kötetlen felszólalásai a vitatott ügy iránti odaadó érdeklődésről tanúskodtak, és egyaránt kitűntek magvas meglátásaikkal s a szóban forgó tárgyat körüljáró gazdag asszociációikkal.

A matematika és más tudományok kapcsolatának ápolását szívügyének tekintette; örömmel vette, ha a matematikai módszerek előrelendíthetik a többi tudományokban folyó vizsgálatokat. Sokoldalúságát mutatja, hogy munkái sorában egyaránt előfordulnak műszaki és filozófiai, biológiai és nyelvészeti

vonatkozású dolgozatok. Munkatársai figyelemet is eloszeretettel hívta fel a tárterületi, alkalmazási jellegű kérdésekre.

Egyetemi oktató munkájában a matematikai analízisnek és a matematika alapjainak előadásait folytatta évtizedeken át rendszeresen a szegedi egyetemen. Mindkét, pontosabban — a halmazelméletet és a logikát külön említve — mindhárom tárgyról alapos jegyzetet írt, jegyzeteit újra meg újra átdolgozta,

5 Eltekintve attól, hogy sok buzgó pedagógus van közöttük, aki kedvvel űzi a formális oktató tevékenységet.

6 Matematikus körökben elterjedt közmondásváltozat: „Nincsen anélkül Kalmár nélkül.”

sajátos pedagógiai elgondolásainak egyre következetesebb kifejtését keresve. Analízisbeli jegyzetei nyomán munkatársai állították össze a posztumusz [107] könyvet.⁷

Alapos és rendszeres áttekintéssel bírt a matematika számos ágáról. Ezt a (ma már szinte egyedülállóan széles) látókört — sokirányú érdeklődése mellett — az tette elérhetővé, hogy kivételesen gyors volt a felfogása és a gondolkodása. A tudományos konferenciákon, amelyeken részt vett, fáradhatatlan figyelemmel kísérte (és jegyezte) az előadásokat. Az ehhez szükséges szellemi frissessége és befogadóképessége mellett azzal a ritka adottsággal is rendelkezett, hogy a vázlatosan előadott gondolatmeneteket hallgatva kicsiből is teljes képet alkotott magának az előadás tárgyáról. Legendás tájékozottságának jelentékeny hányadát nem olvasással, hanem ilyesféle közvetlen kapcsolatokkal szerezte.

Az 1960 körüli években a Kalmár köré csoportosuló kutatói gárda keddenként rendezte a heti szemináriumot. Elvben este 7-től 9-ig tartott volna az összejövetel (Kalmár napirendjéhez hozzátartozott a kiadós délutáni alvás). Hét óra táján professzorunk átjött munkatársainak szobájába, ott egy darabig színes történeteket mesélt, például az egyetem húsz-harminc évvel azelőtti neves embereiről és érdekes eseményeiről, olykor vicceket mondott. Fél nyolc felé ment át a társaság az előadóterembe, ahol beláthatatlanul sokáig eltarthatott volna az érdemi munka, ha az épület esti kapuzárása nem korlátozza időnket. Fél tíz körül hosszú csengőszó jelezte az idő lejártát mindazoknak, akik még az épületben tartózkodtak. Ezután tömörebbre fogtuk a megbeszélést, és 15–20 perccel később kivonultunk a kapun a megkönnyebbülő portás színe előtt.

Kalmár tudományos pályafutásának reprezentatív eseménye volt, amikor 1962-ben a Bolyai Társulat konferenciát rendezett Tihanyban a matematika általa művelt ágaiból. Mint a szervező bizottság elnöke (1. ábra), mintaszerű alaposággal és agilitással járt el ebben az éppen egyéniségére szabott funkcióban. A számos neves külföldi résztvevő között Alonzo Church amerikai professzor (2. ábra) is ott volt, a matematikai logika kimagasló tudósa, akinek neve a jelen munka következő oldalain is több ízben szerepelni fog.⁸

- 7 Analízis-előadásainak egyik különleges vonása volt, hogy (a szokásos sorrend megfordításával) az infinitezimális kalkulus két ága közül az integrálszámítást adta le előbb, és a differenciálszámítást csak utána.
- 8 Church nagyságának érzékeltetésére hadd idézzük *Egerváry Jenő* szavait [C. 4]: „Irodalom tanulmányozása során [...] szemembe ötlött egy rövid cikk a differenciálokról. Ezt [...] több hasonló tárgyú cikk követte, melyek közül bennem különös érdeklődést váltott ki Alonzo Church dolgozata. Church tudvalevőleg a matematikai logikának ma egyik leghíresebb művelője, kinek egyéni kutatásai sztratoszférikus távolságban vannak a «földi» matematikától. Azzal a kíváncsisággal kezdtem olvasni Church dolgozatát, amellyel egy szerény szemlélő — mondjuk — Olivecronát nézné, ha az egy szép napon manikűrözéssel kezdene foglalkozni.”



1. ábra

Kalmár László Tihanyban, 1962





2. ábra

Alonzo Church és Kalmár László a konferencia néhány résztvevője körében; Tihany, 1962

Abból, amit eddig láttunk, oly tudósi egyéniség képe bontakozik ki, akiben egyaránt magas fokban voltak meg ellentétesnek tekinthető személyes tulajdonságok. Egyrészt olyan területet művelt kiváló szinten, amely rendkívüli mértékű elmélyedést, befelé fordult munkastílust, a lényegre irányuló éleslátást követel. Ő emellett — talán paradox módon — élénk modorú, gyakran színporkázóan szellemes, a kisebb-nagyobb részletkérdésekre is fogékony, hangulati hullámlásokról nem mentes, sajátosan közvetlen egyéniség tudott maradni. Világos a mondottakból, hogy sokoldalú munkája milyen roppant szellemi teljesítmény volt. Emellett a ő matematikusi mivoltán túl is gazdag életet élt. Utalunk ezzel arra is, hogy jártas volt a természettudományokban, irodalomban, zenében, és hogy sok elmesport jellegű társasjátékot ismert, de elsősorban arra a szerepre gondolunk, amely mint nagycsaládú apára és nagyapára hárult reá. Árvay Erzsébettel 1933-ban kötött házasságából három leánya és egy fia született (1938 és 1947 között). A pótolhatatlan veszteséget, ami a matematikusi pályára készülő középső lányának halálával következett be 1963-ban, az egymás után érkező unokák fölötti öröm enyhítette.⁹

Azzal, hogy munkássága utolsó szakaszában Kalmár László érdeklődése főként a számítástudományra összpontosult, olyan területen fejthetett ki működést, ahol természetes, a tárgy jellegével összhangban álló módon élhette ki a személyes kontaktusokra való hajlamát, hiszen itt mérnökökkel és egyéb nem-matematikai szakemberekkel is együttműködésbe került, akiknek az elvont matematikai publikációk tanulmányozása nem volt kenyerre. Kalmár e téren kifejtett közösségi működésének maradandó, kézzelfogható eredménye maradt reánk: a magyar számítástechnikai kultúra. Élete utolsó húsz-huszonöt évében az hatotta át főcélként a tudományos közéletben való szereplését, hogy *a matematikusokat a számítástudomány (és azzal közeli kapcsolatban álló matematikai területek) művelésére buzdítsa, és irányítsa ilyen irányú tevékenységüket, hogy agitáljon a számítógépek beszerzése és építése mellett, valamint hogy előmozdítsa a gépek alkalmazását a tudomány és a gyakorlat különféle területein. (Az ötvenes években a kibernetikát elítélő ideológiai felfogást is ki kellett védenie.) Mindezekben nagyságrendekkel rosszabbul állnánk az ő lankadatlan erőfeszítései nélkül. Valamennyi magyar szakember, akinek működése a számítástudományra és -technikára irányul. Kalmár Lászlóra mint mesterére emlékszük. és túlzás nélkül elmondhatjuk.*

hogy a számítástudomány elméletének és gyakorlatának az a fejlettsége, amelyet Magyarországon napjainkban elértünk, személyesen az ő tevékenységéből eredt. (A szerk. kiemelése)

9 Első unokája 1958-ban született; 1965 és 1976 között további négy unokának érte meg a születését.

57

3. Tisztségei és kitüntetései

A II/a. szakaszt túlságosan szárazzá tette volna, ha ott térünk ki azon említést érdemlő elismerések mindegyikére, amelyekben Kalmár László részesült. Ezért itt adunk rövid felsorolást a korábban mellőzött adatokról.

1922-ben megnyerte az Eötvös Loránd matematikai versenyt. 1936-ban az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat a König Gyula jutalomban részesítette addigi kutatói tevékenységéért. Az 1950/51. tanévben a Szegedi Tudományegyetem rektora volt. 1950-ben Kossuth-díjban részesült. A matematika oktatásában és népszerűsítésében végzett munkáját a Bolyai János Matematikai Társulat 1958-ban Beke Manó díjjal jutalmazta. 1963 és 1965 között alelnöke volt a Nemzetközi Tudománytörténeti és Tudományfilozófiai Unió Logikai, Metodológiai és Tudományfilozófiai Osztályának. 1964-ben az oktatásügy kiváló dolgozójává nyilvánították. 1965-ben a Munka Érdemrend arany fokozatával tüntették ki. A Bolyai János Matematikai Társulat 1969-ben tiszteletbeli elnökké választotta, 1970-ben (a tudományos iskolák központi személyiségeinek járó, ekkor első ízben adományozott) Szele Tibor-emlékéremben részesítette. 1975-ben Állami Díjban részesült. A Neumann János Számítógéptudományi Társaságnak ugyancsak tiszteletbeli elnöke volt.

Számos folyóiratnak (köztük a „*The Journal of Symbolic Logic*”-nak és az „*Acta Scientiarum Mathematicarum*”-nak) szerkesztőbizottsági tagja, az „*Acta Cybernetica*”-nak (Szeged) és az „*Alkalmazott Matematikai Lapok*”-nak (Budapest) alapítója és főszerkesztője volt.

* * *

A szegedi József Attila Tudományegyetem kibernetikai laboratóriuma ma Kalmár László nevét viseli. Kalmárról van elnevezve az az emlékdíj is, amelyet a Neumann János Számítógéptudományi Társaság kb. két évente oszt a számítástudomány művelésében és alkalmazásában elért eredményekért. Az ő nevét őrzi továbbá az az országos verseny, amelyet a TIT keretében a Kis Matematikusok Baráti Köre évente rendez.

III. Munkásságáról

1. Matematikai logika

A matematika valamely ágának rendszeres tárgyalása rendszerint azzal indul, hogy felsoroljuk az illető terület *alapfogalmait*, és kimondjuk az alapfogalmakra vonatkozó (az azok kapcsolatát lerögzítő) *axiómákat*.¹⁰

Úgy vesszük továbbá, hogy (többé vagy kevésbé hallgatólagosan) körül vannak határolva azok a következtetési módok, amelyeket helyesnek fogadunk el. Ezek után a tekintett matematikai terület tárgyalása főképpen abban áll, hogy az axiómák alapján újabb *fogalmakat definiálunk*, *problémákat* fogalmazunk meg, és a felmerülő (kellő szabotossággal felvetett) problémákra választ igyekszünk kapni.

Mit jelent az, hogy „kellő szabotossággal” vetjük fel a problémákat, és milyen jellegű a válasz, amire várunk? A problémákat célszerű olyan alakra hozni, hogy „igaz-e az, hogy . . .” típusú kérdésként, vagy — ami lényegileg ugyanaz — igenlő vagy tagadó választ igénylő *sejtés* gyanánt legyenek megfogalmazva. A probléma megoldása pedig azt jelenti, hogy *bizonyítást* dolgozunk ki, amely (az axiómákra és azok korábban már ismert következményeire támaszkodva) a kérdésre igenlő vagy tagadó választ szolgáltat. Ha (hibátlan) bizonyítást sikerült adni, akkor ezáltal vagy maga a sejtés, vagy annak tagadása (negáltja) a vizsgált matematikai elmélet *tételévé* emelkedik.

Az ekként vázolt *axiomatikus módszer* a matematikában általánosan elfogadott eljárás, minden matematikai ágat nagyjából ilyen módon építünk fel. Ennélfogva a matematika egészére ki kell, hogy hasson annak a kérdéskörnek az általános vizsgálata, mennyire bízhatunk meg egy axiómarendszerben. Tegyük fel, hogy összeállítottuk axiómák egy rendszerét (azzal a szándékkal, hogy axiómáink egy matematikai elméletnek szolgáljanak alapul). Remélhetjük-e, hogy a megfogalmazható sejtések bármelyikére megtalálható vagy az igazolás, vagy a cáfolat; de olyan rendellenes helyzet sohasem fog előállni, hogy magát a sejtést is be tudjuk bizonyítani, és az azzal ellentétes állítást is?

Világos, hogy jónak csak akkor tekinthetünk egy axiómarendszert, ha nincs olyan állítás, amelyet rendszerünk alapján igazolni is, cáfolni is lehet: vagyis

ha *ellentmondástalan* (más kifejezéssel: *konzisztens*) az axiómarendszer. És ha az ellentmondástalanság teljesül is, ideális fokban akkor lenne megfelelő a rendszerünk, ha minden sejtésre, amely a rendszerre építve felvethető, axiómáink (ilyen vagy olyan) választ szolgáltatnának, vagyis ha *teljes* (másképpen: *kategorikus*) rendszerrel volna dolgunk. Mit mondhatunk a matematikában használatos axiómarendszerek ellentmondástalanságáról és teljességéről?

- 10 Például a geometriában a pont, egyenes és a sík alapfogalmak; alapfogalmai a geometriának emellett bizonyos relációk is, például „a P pont illeszkedik az e egyeneshez” reláció. A szokásos axiómák egyike így hangzik: valahányszor P és Q két különböző pont, akkor egy és csak egy olyan e egyenes létezik, hogy P is, Q is illeszkedik e -hez.

Az ellentmondástalanságot illetően viszonylag megnyugtató a helyzet. Több fontos axiómarendszer ellentmondástalansága részben nyilvánvaló, részben be van bizonyítva, de a fennmaradó fontos axiómarendszerek esetén is valószínűtlen, hogy ellentmondások bukkannának fel. Igen jelentős sikere volt az ellentmondástalansági vizsgálatoknak, amikor Gerhard Gentzen 1935-ben kimutatta a természetes számok aritmetikája axiómarendszerének ellentmondástalanságát. Gentzen eredeti bizonyítása meglehetősen bonyolult volt, ez arra indította a matematikusokat, hogy egyszerűbb bizonyításokat keressenek ugyanerre a tényre. Kalmár László egyike volt azoknak, akiknek sikerült egyszerűbb bizonyítást találniuk; bizonyítása David Hilbert és Paul Bernays összefoglaló könyvében kapott helyet.¹¹ (3. ábra)

Gyökeresen másként állnak a dolgok a teljesség kérdésében: az derült ki, hogy *teljes (kategorikus) axiómarendszer nem létezik*. 1930 körül ugyanis Kurt Gödel arra a (sokak számára meglepő) eredményre jutott, hogy egy eléggé szabályos, eléggé kifejezőképes és ellentmondástalan axiómarendszerhez¹² szükségképpen létezik olyan probléma (pontosabban: „igen” vagy „nem” választ igénylő kérdés), hogy — ámbár magát a problémát meg lehet fogalmazni a rendszer eszközeivel — a rendszeren belüli eszközökkel a problémára sem bizonyítás, sem cáfolat (azaz olyan következtetés, amely a probléma tagadását bizonyítja) nem adható. Kalmár főként a [21], [29], [30], [34] munkáiban (4. ábra) járult hozzá e tárgykörhöz; a szabályossági és kifejezőképességi feltételeket igyekezett úgy kiróni, hogy azok minél enyhébb korlátozást jelentsenek (vagyis a tekintetbe jövő axiómarendszerek köre minél szélesebb legyen), és emellett arra törekedett, hogy az eldönthetetlen probléma minél egyszerűbb és természetesebb konstrukcióval adódjék.

A megválaszolhatatlan kérdések irodalmának a Gödel munkáját követő fellendülése során Alonzo Church még tovább ment egy lépéssel: a harmincas évek közepén problémát szerkesztett, amelyről azt mutatta meg, hogy — bizonyos értelemben, mégpedig az úgynevezett általánosan rekurzív módszerekkel — elvileg lehetetlen akár bizonyítást, akár cáfolatot adni rá. (Egy konkrét axiómarendszer lerögzítése itt *nem* játszik bele a kérdésbe.) Church eredménye a matematika (és a filozófiai ismeretelmélet) alapjait érintő élénk vitákat vál-

tott ki. Az ő problémája olyan szerkezetű, hogy *végtelen sok* részproblémát¹³ fog össze *egyetlen* problémává; természetes ezek után, hogy tisztázó célú vita

- 11 [C. 6], II. kötet, 513—535. oldal. Supplement V/A. (E könyv két kötete eredetileg 1934-ben, ill. 1939-ben jelent meg; Kalmár bizonyítását az első kiadás csak utalás formájában érintette, s az csupán a második kiadásban vált hozzáférhetővé.)
- 12 A szabályosság és kifejezőképesség megkövetelése bizonyos (technikai okokból adódó) korlátozásokat jelent; ami fontos ebben, az az, hogy a matematikában felmerülő axiómarendszerek mindig eleget tesznek ezeknek a korlátozásoknak.
- 13 Pontosabban: megszámlálhatóan végtelen sokat, vagyis a pozitív egész számok mindegyikéhez egyet-egyet. (Csak ennyit; a megszámlálhatóan végtelen a legkisebb a halmazelméletben fellépő végtelen számosságok között.)

Supplement V.

Widerspruchsfreiheitsbeweise für den zahlentheoretischen Formalismus.

A. Der Kalmársche Widerspruchsfreiheitsbeweis.¹

Der zahlentheoretische Formalismus, dessen Widerspruchsfreiheit bewiesen werden soll, ist das System (Z). Mit einem Nachweis der Widerspruchsfreiheit von (Z) wird auch die Widerspruchsfreiheit von (Z_μ) erwiesen; das ergibt sich aus der Beziehung der beiden formalen Systeme auf Grund der Definierbarkeit des Symbols $\mu_x A(x)$ durch einen ι -Term und des Theorems über die Eliminierbarkeit der Kennzeichnungen².

Im System (Z_μ) können, wie wir wissen, die primitiv rekursiven Funktionen und, in einem schwächeren Sinne, auch die quasi-rekursiven Funktionen explicite definiert werden³. Andererseits bedeutet es für den auszuführenden Beweis keine Erschwerung, wenn wir von vornherein den Formalismus (Z) dadurch erweitern, daß wir die Einführung von Symbolen für berechenbare Funktionen einer oder mehrerer Zahlenvariablen zulassen, d. h. von Funktionen, für welche ein Verfahren der Berechnung ihrer Werte für Ziffernwerte der Argumente gegeben ist.

An den Begriff der Berechenbarkeit knüpfen sich die Begriffe der „wahren“ und der „falschen“ sowie der „verifizierbaren“ Formel. Eine Formel sowie ein Term heiße „numerisch“, wenn darin keine Variable auftritt⁴. Eine numerische Gleichung heiße „wahr“, wenn auf Grund der Berechnung der auftretenden Funktionen sich beiderseits der gleiche Ziffernwert ergibt; andernfalls heißt sie „falsch“. Einer wahren Gleichung wird der Wert „wahr“, einer falschen Gleichung der Wert „falsch“ zugeschrieben.

¹ Der im folgenden dargestellte Beweis von LÁSZLÓ KALMÁR ist bisher nicht publiziert worden. Er wurde im September 1938 in einem ausführlichen Manuskript vorgelegt.

² Vgl. die Feststellungen im Band II, S. 338 (Zeile 26—32). Das System (Z) wurde im Band I, S. 381 eingeführt, das Symbol $\mu_x A(x)$ im Band I, S. 405 und das

System (Z_{μ}) im Band II, S. 306. Das Theorem über die Eliminierbarkeit der Kennzeichnungen wurde im Band I, § 8 bewiesen.

³ Vgl. Band I, S. 421—430 und Band II, Suppl. II, S. 412—413

⁴ Dieser Gebrauch der Terminus „numerisch“ bedeutet eine Erweiterung gegenüber unserer früheren Definition im Band I, S. 228 und Band II, S. 34, wonach eine variablenlose Formel nur dann „numerisch“ genannt wurde, wenn alle darin vorkommenden Terme Ziffern sind.

33 Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik II, 2. Aufl.

3. ábra

Hilbert és Bernays könyve azon függelékének első oldala, amelyben a szerzők Kalmár bizonyítását hozzák nyilvánosságra [C. 6]

61

Another proof of the Gödel—Rosser incompleteness theorem.

By LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged.

In a paper¹⁾ which became a source of a series of investigations, GÖDEL has proved a theorem to the effect that for every postulate system satisfying some very general conditions, there is an arithmetical problem unsolvable in that system. One of the conditions for the postulate system requires not only its non-contradictoriness, i. e. the absence of two theorems one of which is the negation of the other, but also its ω -consistency, i. e. the absence of an enumerable series of theorems, one stating that some positive integer has a given property while the others state in succession that 0 does not have that property, 1 does not have that property, etc. While non-contradictoriness is a natural condition for in a contradictory system (containing some parts of logic, e. g. those allowing to form indirect proofs) everything can be proved, hence there are no unsolvable problems, ω -consistency is regarded a rather sophisticated condition. Hence it was a great progress that ROSSER succeeded²⁾ in replacing the condition of ω -consistency by non-contradictoriness.

In this paper I shall give a simplified proof for ROSSER's theorem using, with appropriate modifications, the method by which I proved GÖDEL's theorem³⁾. At the same time, I shall present the proof with the same degree of generality as I did that of GÖDEL's theorem in two recent publications⁴⁾,

1) K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 38 (1931), p. 173—198.

2) B. ROSSER, Extensions of some theorems of Gödel and Church, *Journal of symbolic logic*, 40 (1965), p. 93—95. Cf. also the theorem II, p. 95. See also D. HILBERT and

Logic, 1 (1930), p. 87–91, especially theorem II, p. 89. See also D. HILBERT and P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*. II (Berlin, 1939), p. 275–276.

3) L. KALMÁR, a) Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára, *Mat. és fiz. lapok*, 50 (1943), p. 1–23; b) Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen, forthcoming in *Methodos*; and see footnote 4).

4) L. KALMÁR, a) Une forme du théorème de Gödel avec des hypothèses minimales, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 229 (1949), p. 963–965; b) Quelques formes générales du théorème de Gödel, *ibidem*, 229 (1949), p. 1047–1049.

4. ábra

Kalmár László egyik munkájának címlapja [A. 34], amelyben új bizonyítást adott a Gödel—Rosser-féle tétele

kerekedjék akörül: mennyiben tekinthető egységes eljárásnak egy módszer, amely végtelen sok részproblémát szolgáltat a speciális eseteiben. Az is alapos elemzést igényel, meggyőző dolog-e valaminek a ténylegesen megkonstruálható voltát azonosítani azzal, hogy előállítható-e az a valami általánosan rekurzív módon. Ezt az azonosítást *Church-féle hipotézis*nek szokás nevezni. A konstruálhatóság itt *intuitív* koncepció, az általános rekurzivitás *szabatosan körülhatárolt* matematikai fogalom.

Kalmár László több tartalmas közleményt (5. ábra) szentelt ilyen jellegű kérdések tanulmányozásának [28], [57], [61]. Megmutatta, hogy a Church-féle értelemben vett eldönthetetlen probléma létezése következik Gödel (korábban általunk már említett) rokon eredményéből, elemezte a kérdéskör ismeretelméleti vonatkozásait, és foglalkozott a Church-féle hipotézis meggyőző voltának kérdésével. Az általánosan rekurzív eljárás fogalma egyszersmindenkorra adva van, ezzel szemben Kalmár felfogása szerint a tényleges konstruálhatóság köre tudásunk fejlődésével egyre bővül. Amit ma meg tudunk szerkeszteni, amit ki tudunk számítani, az valóban mindig általánosan rekurzív, de idővel esetleg az általános rekurzivitás körén kívüli függvények egyikének-másikának az értékei is megadhatóak lesznek.¹⁴ Az, hogy a mindenkori matematikai eszközeinkkel mi érhető el, eleven és változó dolog, amit nem lehet egy merev definíció béklyójába zárni.

* * *

Amikor a Gentzen-féle és Gödel-féle tételek ismertetését készítettük elő, úgy állítottuk be a kérdéseket, hogy alapul vesszünk bizonyos axiómákat: A_1 -et, A_2 -t, ... A_n -et és az érdekel minket, hogy melyek azok a — mondjuk, B -vel jelölt — állítások, amelyek következnek az

$$A_1 \ \& \ A_2 \ \& \ \dots \ \& \ A_n$$

alapfeltevésből. (B -t futtattuk, az A -kat rögzítve gondoltuk.) Arról volt tehát szó, hogy (a matematikai logika jelöléstechnikáját tovább alkalmazva) az

$$(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$$

típusú formulák közül melyek érvényesek és melyek nem.

Általánosságban úgy is fel lehet vetni a kérdést, hogy adjunk egyetemes módszert, amely képes arra, hogy az elképzelhető értelmes formulák akármelyikéről

- 14 Másfelől — amint Péter Rózsa mutatott rá [C. 9] — az általános rekurzivitás körén belül is vannak függvények, amelyeket aligha lehet ténylegesen kiszámíthatóaknak tekinteni.

Constructivity in Mathematics

AN ARGUMENT AGAINST THE PLAUSIBILITY OF CHURCH'S THESIS

LÁSZLÓ KALMÁR

Bolyai Institute, The University, Szeged, Hungary

1. In his famous investigations on unsolvable arithmetical problems [1], Church used a working hypothesis, viz. the identification of the notion of effectively calculable functions with that of general recursive (or, equivalently, λ -definable) functions. This working hypothesis is known under the name Church's thesis. It has several equivalent forms — e.g. Turing's identification of the notion of effectively calculable functions with that of functions computable by means of a Turing machine [10], or Markov's principle of the normalizability of algorithms [6] or [7] — which are generally accepted in the investigations on unsolvable mathematical problems.

In the present contribution, I shall not disprove Church's thesis. Church's thesis is not a mathematical theorem which can be proved or disproved in the exact mathematical sense, for it states the identity of two notions only one of which is mathematically defined while the other is used by mathematicians without exact definition. Of course, Church's thesis can be masked under a definition: we call an arithmetical function effectively calculable if and only if it is general recursive, venturing however that once in the future, somebody will define a function which is on the one hand, not effectively calculable in the sense defined thus, on the other hand, its value obviously can be effectively calculated for any given arguments. Similarly, in defining a problem, containing a para-

meter which runs through the natural numbers, to be solvable if and only if its characteristic function ¹⁾ is general recursive, one takes the risk that somebody in the future will solve a problem

¹⁾ The characteristic function of a problem with parameter is defined as the function taking the value 1 or 0 for a value of the parameter according as "yes" or "no" is the correct answer to the particular case of the problem corresponding to this value of the parameter.

72

5. ábra

A Church-tézishez hozzászóló tanulmány címlapja [A. 61]

64

eldöntse, érvényes-e az a formula, vagy érvénytelen.¹⁵ Az ilyen általános módszer keresésének kérdését *eldöntésproblémának* nevezik a matematikai logika művelői.

Jelöljük az értelmes formulák összességét F -fel. Az eldöntésproblémával foglalkozó kutatásoknak két fő iránya van:

(1) Találjunk F -ben minél bővebb G formula-osztályokat úgy, hogy egységes eljárásunk van a G -be tartozó formulák érvényes vagy érvénytelen voltának meghatározására.

(2) Találjunk F -ben minél szűkebb H formula-osztályokat úgy, hogy egységes eljárásunk van, amely minden F -beli f formulához egy H -beli h formulát rendel, és teljesül az az állítás, hogy f pontosan akkor érvényes, ha érvényes h is.

Az eldöntésprobléma teljes megoldását az jelentené, ha találni sikerülne olyan G , H formula-osztályokat (a fenti tulajdonságokkal), hogy $G \supseteq H$ lenne igaz rájuk.¹⁶ Azonban — amint Church a harmincas évek közepén bebizonyította — ez (általánosan rekurzív eszközökkel) elvileg elérhetetlen. Kalmár egyszerűsített bizonyítást adott [51], [54] az eldöntésprobléma teljes megoldásának lehetetlenségére (6. ábra). Ez a tény természetesen egyáltalán nem vonja maga után azt, hogy az (1), (2) kutatási irányok művelése ne volna értékes; maga Kalmár László — és vele együttműködve Surányi János — számos dolgozatban járult hozzá a (2) irányban folyó kutatásokhoz. Az ebben az irányban elért eredményekről Surányi könyvben is áttekintést adott [C. 11].¹⁷

Kalmárnak a matematikai logikai vizsgálatai nem merültek ki a fentebb vázolt témák körébe vágó munkáival. Jónéhány további, logikai tárgyú dolgozata közül most röviden utalunk néhányra. A [12] közleményben az állításkalkulus axiomatizálhatóságának adja egyszerű tárgyalását (annak a ténynek, hogy megadható véges sok axióma és véges sok következtetési szabály úgy, hogy ezek alkalmazásával éppen az állításkalkulus azonosan igaz formulái nyerhetők). A [42] munkában egy, a logika és az algebra határán álló tételre nyer új bizonyítást: arra, hogy az asszociatív rendszerek szó-problémájára nem létezik

- 15 Itt tehát már túlléptünk azon, hogy egyetlen lerögzített axiómarendszerrel dolgozzunk. Csupán az értelmes formulák felépítésére vonatkozó logikai elvek és az érvényesség igazolására szolgáló következtetési szabályok szolgálnak alapfeltevésekül. — Szakszerűbben szólva, „értelmes” formula helyett a „jólképzett” formula precízen körülhatárolt fogalmát szokás tekinteni; egy formula „érvényes” vagy „érvénytelen” volta helyett pedig azt szokás vizsgálni, hogy vajon „van olyan modell, amelyben a formula teljesül”, illetve „a formula nem teljesül az elképzelhető modellek egyikében sem”.
- 16 Ha az (1), (2) főirányok összehálikoznának (ha $G \supset H$ elérhető volna), ez bizonyos értelemben sterillé tenné a matematikát. Az eldöntésprobléma ezen teljes megoldása azt jelentené, hogy gépies módszer áll rendelkezésünkre, amely (elvben) újabb ötletek nélkül, mechanikusan képes eldönteni bármely formula igaz vagy hamis voltát, vagyis amely bármely értelmes matematikai sejtésre, ami csak felmerül, mechanikus eljárással tud választ adni.
- 17 Az (1) kutatási irányról Wilhelm Ackermann írt könyvet [C.1] A hetvenes évek végén újabb összefoglaló munkák is megjelentek az elmélet korszerű állásáról.

*Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.,
Bd. 2, S. 1—14 (1956)*

EIN DIREKTER BEWEIS FÜR DIE ALLGEMEIN-REKURSIVE UNLÖSBARKEIT DES ENTSCHEIDUNGSPROBLEMS DES PRÄDIKATENKALKÜLS DER ERSTEN STUFE MIT IDENTITÄT¹⁾

Von LÁSZLÓ KALMÁR in Szeged, Ungarn

1. Für den zuerst von A. CHURCH²⁾ bewiesenen Satz, wonach das Entscheidungsproblem des Prädikatenkalküls der ersten Stufe (mit oder ohne Identität)³⁾ sich (bei Zugrundelegung der üblichen Numerierungen der Formeln des Prädikatenkalküls) nicht durch ein allgemein-rekursives Verfahren lösen läßt,⁴⁾ sind mehrere Beweise bekannt.⁵⁾ Die bisher publizierten Beweise sind meines Wissens sämtlich von der folgenden Struktur. Es wird zunächst eine abzählbare Problemschar⁶⁾ P angegeben, wofür bei Zugrundelegung einer festen Numerierung der zur Schar gehörigen Einzelprobleme gezeigt wird, daß sie sich nicht durch ein allgemein-rekursives Verfahren lösen läßt. Dann wird die Problemschar P durch

¹⁾ Vorgetragen am 22. November 1954 vor dem Mathematischen Kolloquium an der Humboldt-Universität zu Berlin.

²⁾ A. CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem. *J. Symb. Log.* 1, 40—41 (1936); Correction to A note on the Entscheidungsproblem. *Ebenda*, S. 101—102.

³⁾ Bei CHURCH a. a. O., wird die allgemein-rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems des Prädikatenkalküls der ersten Stufe ohne Identität bewiesen; dasselbe Beweisverfahren kann jedoch unmittelbar (sogar noch etwas einfacher) auf das Entscheidungsproblem des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität angewandt werden. Übrigens ist es bekanntlich für den Satz über die allgemein-rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems gleichgültig, ob es sich um das Entscheidungsproblem des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit oder ohne Identität handelt. Das Wort „Entscheidungsproblem“ werde ich weiter unten der Kürze halber für beide dieser Fassungen verwenden; ebenso nenne ich den Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit oder ohne Identität kurz „Prädikatenkalkül“.

⁴⁾ Ob die übliche Formulierung des CHURCHschen Satzes, daß nämlich das Entscheidungsproblem überhaupt nicht durch ein endliches Verfahren lösbar ist, richtig ist, hängt vom Zutreffen oder Nichtzutreffen der CHURCHschen Vermutung (A. CHURCH, An unsolvable problem of elementary number theory. *Am. Journ. Math.* 58, 345—363 (1936), insbes. S. 356) ab, wonach eine arithmetische Funktion, deren Wert sich an jeder gegebenen Stelle in endlich vielen Schritten berechnen läßt, notwendig allgemein-rekursiv ist. Ich gehe hier nicht auf die Frage des Zutreffens oder Nichtzutreffens dieser Vermutung ein, ich bemerke nur, daß es sich — solange man Berechenbarkeit nicht in einem mathematisch präzisierten, sondern, was für die erwähnte Formulierung des CHURCHschen Satzes wichtig ist, im allgemeinsten Sinne versteht —, um eine erkenntnistheoretische Vermutung handelt, und daß man, wie ich an einer anderen Stelle näher begründen werde, gute (zuletztmetaphysisch-philosophische) Gründe für eine Be-

...eine hier begründete Vermutung, gute (wissenschaftliche) Gründe für die Zweifelung dieser Vermutung hat.

⁵⁾ Vgl. z. B., außer CHURCH a. a. O., A. M. TURING, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. of the London Math. Soc. (2) 42, 230—265 (1937), insbes. S. 259—263; On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction. Ebenda (2) 43, 544—546 (1937).

⁶⁾ Das heißt ein Problem mit einem Parameter, der abzählbar unendlich viele Werte annehmen fähig ist, so daß zu jedem Parameterwert je ein Einzelproblem der Schar gehört, welches man mit „ja“ oder „nein“ zu beantworten hat. In diesem Sinne ist auch das Entscheidungsproblem eine abzählbare Problemschar mit einer Formel des Prädikatenkalküls (deren Erfüllbarkeit zu entscheiden ist als Parameter.

1 Ztschr. f. math. Logik

6. ábra

Kalmár László írása az eldöntés-problémáról [A. 54]

66

általánosan rekurzív megoldási eljárás. A [48], [49] cikkekben negatív irányban dönti el Karl Schröternek az általánosan rekurzív függvényekre vonatkozó egy sejtését.

2. Elvi és népszerűsítő publikációk

Kalmár László cikkeinek azt a hányadát, amelyekben a matematika általános kérdéseit — mondhatnánk, a matematika filozófiáját — veszi szemügyre, és amelyekben már korábban létrejött eredményekről ad nagyvonalú áttekintést, voltaképpen nem lehet élesen szétválasztani az eredeti vizsgálatokat közlő munkáitól. Az eredeti közlemények egy részében (különösen a magyar nyelvűekben) is helyet kapnak ismertető jellegű szakaszok vagy az egzakt anyaghoz kapcsolódó elvi fejtegetések.¹⁸

Több olyan munkát írt (7. ábra), amelyekben áttekintést adott a matematikai logika alapfogalmairól és időszerű kutatási irányairól (pl. [19], [56]). A kibernetika fogalmának körülhatárolásával foglalkozó [66] közleményéről a (c) pontban fogunk szólni. Számos dolgozatában a kívülálló érdeklődőkre, a tanárookra vagy a matematika iránt fogékony diákságra számít olvasókként, és a matematika tárgyának, módszereinek, esetleg egy-egy könnyebben felfogható konkrét eredménynek világos (gyakran színes és szellemes) bemutatását adja, példaként a [20], [26], [94] munkákat említhetjük (8. ábra). Ide sorolható még a [99] interjú és az a tévé-riport,¹⁹ amelynek szóbeli anyaga könyv-részletként vált hozzáférhetővé [B. 12].

A matematika mai helyzetében felmerülő elvi kérdésekről (egyebek között a matematika és a gyakorlat kapcsolatának problémáiról) például a [75], [77], [81] munkáiban mondott Kalmár véleményt, de kitűnik az e kérdésekre vonatkozó álláspontja a logikai kutatásait kifejtő cikkeiből is. Az ide vágó megnyilatkozások hitet tesznek Kalmár azon meggyőződése mellett, hogy a matematika sohasem válhat lezárt egésszé (még csak egyre magasabbra törő, de befejezett alapokon nyugvó épületté sem), hanem a fejlődés állandóan igényelni fogja

- 18 Itt említjük meg, hogy a matematikai vizsgálatoknak azt a megírási formáját, amely az anyagot élesen széttagolja definíciókra, tételekre és bizonyításokra (ezt a szerkesztési módot a matematikusok többsége tiszteletben tartja), Kalmár nem szerette mereven alkalmazni, hanem a többé-kevésbé fellazított fogalmazásmódot kedvelte.
- 19 A tévéadás jellegzetes bevezető képsora kerékpározva mutatta be Kalmárt, amint a szegedi utcák forgalmának egyik résztvevőjeként halad az egyetem és otthona között.

HILBERT-FÉLE BIZONYÍTÁSELMÉLET CÉLKITÜZÉSEI, MÓDSZEREI ÉS EREDMÉNYEI.¹

Közmondásos a matematika csálhatatlanságába vetett hit: «olyan biztos, mint hogy kétszer kettő négy», mondjuk valamiről annak kifejezésére, hogy nem fér hozzá kétség. Talán csak az orvostudományban bíznak még hasonló mértékben a laikusok. Az orvos, betege érdekében is, csálhatatlannak mondja módszereit; egymás között azonban az orvosok is élesebb kritika alá veszik tudományuk eredményeit. Nekünk matematikusoknak is tisztázunk kell, hogyan is áll a dolog a matematika csálhatatlanságával.

A matematikának az ad tekintélyt a laikus előtt, hogy a valóságra alkalmazva mindig helyes eredményre vezet; bizonyítéka ennek többek között minden mérnöki számítás szerint épített ház, lift, híd, amely nem dől össze, nem szakad le. Ez a tény azonban nem pusztán a matematikán múlik, hanem a környező világnak egy éppenséggel nem magától értetődő tulajdonságán;² e miatt ez a tény másképp nem igazolható, mint empirikusan.

¹ A Kir. Magyar Pázmány Péter Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének kollokviumán 1939. november 3-án tartott előadás második felének részletes kidolgozása. Az előadás első fele a halmazelmélet elemeiről adott áttekintést; ezeket itt ismereteknek teszem fel.

² Valóban, a matematikának a környező világra való minden egyes alkalmazása végelemzésben az idő valamely $f(t)$ függvényének valamely helyen való meghatározását kívánja, a rendelkezésre álló adatok mind az $f(t)$ függvénynek a $t \leq t_0$ helyeken való viselkedésére vonatkoznak.

ahol t_0 a jelen pillanat. Ugyanis mindaz, amit a természetről biztosan tudunk, a multra s a jelenre vonatkozik; ezekből kell — megfelelő elmélet felállítása és esetleg az időt explicite nem is tartalmazó matematikai műveletek útján — egy, rendszeren a jövőre, esetleg a multra vonatkozó ismeretlen adatot meghatároznunk. Egy cseppet sem magától értetődő, hogy a szóbanforgó $f(t)$ függvények minden egyes esetben

Matematikai és Fizikai Lapok. XLVIII.

5

7. ábra

Áttekintés a matematikai logika alapfogalmairól és időszerű kutatási irányairól [A. 19]

68

fizikai szemle

AZ EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT LAPJA

Alapította Eötvös Loránd 1891-ben Mathematikai és Physikai Lapok néven

XX. évfolyam

5. szám

1970. május

A KIBERNETIKÁRÓL

Kalmár László

J. A. T. E.

Kibernetikai Laboratórium, Szeged

A kibernetikáról sok zavaros fogalom van elterjedve. Ezzel a dolgozattal szeretnék hozzájárulni a fogalmak tisztázásához.

A kibernetika kialakulása és tárgya

Az ember mindig szerette alkotásait saját magához hasonlítani: így beszélünk az asztal, a szék lábáról, a kancsó füléről, a palack nyakáról stb. Ez a törekvés, amely talán a gyermek megszemélyesítő hajlamán alapul, természetesen érvényesült akkor is, amikor az ember gépeket kezdett létrehozni: a gépek és az ember közötti analógiát hamar felfedezte.

Plauzibilis, hogy van ilyen analógia, hiszen a gép az ember helyett végez munkát, ennél fogva valami hasonlatosságának kell lennie az emberhez. A kibernetika mint tudomány azonban akkor született meg, amikor néhány tudós rájött arra, hogy itt nemcsak felületes analógiáról van szó, hanem közös objektív törvényszerűségekről is, amelyek a lényegesen eltérő viszonyok, a különböző mozgásforma ellenére is érvényesülnek.

A kibernetika szülőházája az Amerikai Egyesült Államok. Születésének ideje a második világháború legfeszélyesebb várható jelenségei, a légitámadások elhárítására megoldást kereső kutatásokkal esik egybe.

Az első világháború idején a légvédelem szinte ugyanolyan módszerekkel dolgozott, mint a va-

légvédelmi ütegek, de ezek csak abban különböztek a vadásztól, hogy a célzásához szükséges becslést számításokkal pótolták. Beépített számítóberendezés számította ki és önműködően állította be a lövelemeket. Azonban az alapelv ugyanaz maradt: annak a feltételezése, hogy a lelövendő objektum, pl. az ellenséges bombázó, ugyanazzal a sebességgel, ugyanabban az irányban halad tovább, mint addig, tehát egyenesvonalú egyenletes mozgást végez addigi sebességével (ún. lineáris extrapoláció). Ezt a feltételezést el lehetett fogadni addig, amíg a repülőgép sebessége elhanyagolható volt a lövedék sebességéhez képest. A nagysebességű repülőgépek megjelenése azonban új helyzet elé állította a légvédelmet.

Az a feltételezés, hogy a nagysebességű bombázók is egyenesen törnek céljukra és egyenletes mozgást végeznek maximális sebességükkel, hogy minél kevesebbet tartózkodjanak az ellenséges zónában, csak addig igaz, míg az első lövedék nem robban a repülőgép közelében. Ezután a pilóta manőverezni kezd, fékez, görbevonalú pályára tér, hogy elkerülje a légvédelmi tüzet. Ezt a tevékenységét a rádiólokátor (népszerű nevén radar) jelzi. Rádióhullámokat bocsát ki az ellenséges objektum felé és összehasonlítja a kibocsátott és visszavert hullámokat, ebből lehet következtetni az objektum helyére, sebességére, gyorsulására. Kérdés, hogyan használja fel ezeket az információkat a légvédelmi automata üteg, hogy a következő lövedék már maximális

dász, amikor pl. vadlibára lö. Nem oda céloz, ahol a vadlibát látja, hanem „előretartással” céloz, tehát megbecsüli a vadliba távolságát és sebességét és oda igyekszik célozni, ahová a vadliba érni fog, amikor a lövedék is odaér, hogy eltalálja.

Igaz, hogy az első világháború végén, s az azt követő időben kialakultak már az önműködő

valószínűségi tálaljon:

Első pillanatban ez lehetetlennek tűnik, hiszen a pilótának szabad akarata van s így nem lehet tudni, hogyan változtatja sebességének nagyságát és irányát. Azonban figyelembe lehet venni azt, hogy

1. a pilóta idegrendszerének reakcióideje véges, és ez meghatározza, hogy egy ingerre milyen késéssel tud reagálni,

2. harci helyzetben a pilóta nem ura idegrendszerének, hanem nagymértékben befolyásolják ténykedését a kiképzés alatt begyakorolt mezdu-latok,

A dolgozat a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat Fizikai, Kémiai, Matematikai Választmánya által rendezett kibernetikai előadássorozatot 1967. XII. 7-én tartott bevezető előadásának rövidített változata.

129

8. ábra

Kalmár László kibernetikát népszerűsítő írása [A. 94]

69

3. Kibernetika és számítástudomány

A matematika Kalmár által művelt többi területeivel szemben a kibernetika és a számítástudomány a kibontakozásnak még viszonylag a kezdetén járó tudományágak voltak abban az időszakban, amikor a kutatásokba ő maga is bekapcsolódott. Annak körülhatárolása is vita tárgyát képezte, hogy mivel foglalkoznak és mire szolgálnak. A számítástudomány eleinte nem is annyira önálló tudományág gyanánt, hanem csak a kibernetika egyik alkotóelemeként szerepelt, s sokan még azt is vitatták, hogy valójában tudománynak tekinthető-e, avagy sem. A fogalmak és kapcsolataik még csak kialakulófélben voltak. Bár kutatási témák bőségesen szerepeltek, de az, hogy melyiknek mekkora hordereje lesz, és ezen irányok fejlődése hová fog vezetni, alig volt előrelátható. Mint már említettük, Kalmár László a munkásságának utolsó két évtizedében ereje javát szentelte a kibernetika, s ezen belül főleg a számítástudomány művelésének. Nemcsak írott életművének ide vágó nagy jelentőségű fejezete tükrözi az e téren kifejtett munkásságát, hanem — legalább ekkora súllyal — azon gondolatai is, amelyek személyes kapcsolatok révén érvényesültek, és pedig kollégáinak elméleti vizsgálataira hatottak inspirálóan, illetve újszerű műszaki berendezésekben öltöttek testet.

1955. októberében a Magyar Tudományos Akadémia kiküldetésében Kalmár részt vett a „Korszerű számológépekkel kapcsolatos kérdések” címmel rendezett drezdai kongresszuson. A széles látókörű, de addig csupán elméleti kérdésekkel foglalkozó tudós azonnal átlátta a téma rendkívüli jelentőségét, s hazatérte után Szegeden létrehozott egy kis kutatócsoportot, amely céljául tűzte ki, hogy beletanul a számológépek tervezésének és programozásának kérdéseibe. Elképzeléseit az Akadémia 1956. májusában tartott nagygyűléséhez kapcsolódó együttes osztályülésen, Tarján Rezső „A gyorsműködésű automatikus számológépek fejlődési irányai” c. előadásához hozzászólva ismertette [58]: „... most a legsürgősebb feladat külföldről behozni gyorsműködésű számológépet; sőt egy gép nem is elég, ma már több ilven gépet tudnánk foglalkoztatni. Azonban

arra is sort kell keríteni, hogy mi magunk is építsünk matematikai gépeket, mert csak így tarthatunk lépést az e téren világszerte folytatott kutatásokkal. Mi, szegediek ebből a munkából Tarján elvtárs tanácsára úgy szeretnők kivenni a részünket, hogy logikai gépek építésére profilírozzuk magunkat; reméljük, hogy az eközben szerzendő tapasztalatainkat fel lehet majd használni számológépek építése során is." Hozzászólásában részletesen ismertette rendkívül szellemes megoldását. Az 1958 májusára Szegeden megépített „szegedi logikai gép” az ítéletkalkulusnak egy legfeljebb nyolc logikai változót tartalmazó formulájához keresi a változók mindazon értékrendszerét, amelyek mellett a formula értéke „igaz”. A gép működése elektromechanikus, a logikai értékeket a hasonló jellegű feladatok megoldására készült *Ferranti*-féle elektromechanikus logikai géppel ellentétben három pont közötti kétféle vezetési állapottal instrumentálja, s ez lehetővé teszi a logikai műveletek eredménye

70

kiszámításának tisztán huzalos megoldását úgy, hogy jelfogókra csak bizonyos „adminisztratív” jellegű feladatok megoldása végett van szükség. A szerkezet tehát huzalokon kívül tulajdonképpen semmiféle alkotóelemet (relét, elektroncsövet stb.) nem tartalmaz.

1956 tavaszán a Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi és Lélektani Intézetében Kalmár későbbi „technikai jobbkeze”, *Muszka Dániel* egy modellt készített bizonyos állati cselekvések gépi utánzására. Ez a *machina docilis* (tanulékony gép) a külseje miatt a szakirodalomban azóta is „szegedi katicabogár” néven ismeretes. Kalmár a fiatalember különleges műszaki ügyességét felismerve, „szárnyai alá” vette őt, és a logikai gép építésén túlmenően több értékes, a kor akkori technikai színvonalán túlmutató kibernetikai rendszer megépítésében együttműködött vele. Bár egyes berendezések (így a logikai gép is), azóta technikailag elavultak, mások (például az ülő szövőő) nem váltak be, némely alkotásuk huszonöt év elmúltával is beválnak és időszerűnek tekinthető (ezek közül a legismertebb a Szegedi Szabadtéri Játékok akusztikai rendszere). Sajnálatos módon a logikai gép [60], [62] és a katicabogár, továbbá egyes orvoskibernetikai rendszerek [85] kivételével az elkészült berendezések többnyire nem, vagy alig kerültek publikálásra.^{20, 21}

A logikai gép építése kapcsán felmerülő gyakorlati kérdéseken túlmenően Kalmár elmélyült elméleti kutatásokat indított el. Az első eredmények a Bolyai Társulat 1958-ban tartott szegedi jubileumi vándorgyűlésén kerültek ismertetésre [60]. Miután a plenáris ülésen Kalmár vázolta az elért elméleti és gyakorlati eredményeket, továbbá a felmerült problémákat, munkatársai²² a „Matematikai logika és matematikai gépek” szekcióban több előadásban számoltak be az olyan témákban elért eredményeikről, amelyre ő hívta fel figyelmüket.

A Dobogókőn 1959-ben szervezett, gráfelméleti kollokviumon Kalmár néhány, az áramkörök elméletével kapcsolatos problémáról tartott előadást [65]. Rámutatott, hogy általános esetben a Boole-féle algebra szerepét a pólusok halmaza osztályozásainak hálójára fogja játszani.

A számítógépek elméletében és azok használatakor különféle jellegű formális nyelvek szerepelnek. Ezek közül a legalsó szinten áll a gép belső nyelve (Kalmár szavaival élve a gép „anyanyelve”): azon elemi szintű gépi utasítások nyelve,

- 20 [85] munkájában az alakfelismeréssel és a feltételes reflexszel kapcsolatos általános problémákat taglalva utal ugyan egy, a József Attila Tudományegyetem Kibernetikai Laboratóriumában elkészült demonstrációs eszközre, mely feltétel nélküli és feltételes reflex elvén alakfelismerési tevékenységet végez, s azt is említi, hogy a technikai részletekre a következő dolgozatában ki fog térni, ez a következő dolgozat azonban nem került publikálásra. Feltehetően arról a hangfelismerő eszközről van szó, amely 1964-es állapotában az *i* magánhangzó — szövegkörnyezetben való — felismerésére volt képes.
- 21 Az, hogy eredményeinek némelyikét elmulasztotta közzétenni, ismételten megtörtént. Pl. a korai években Gödel több fontos eredményére Gödeltől függetlenül ő is rájött, de addig halogatta a publikálásukat, amíg az végül is tárgytalanná vált.
- 22 Nemesak közvetlen szegedi munkatársai, hanem az ilyen irányban érdeklődő budapesti kutatók is.

melyeket a gép közvetlenül végre tud hajtani. Ennél magasabb szinten áll a gép programozási nyelve: ez az a formalizmus, amelyen a géppel adatokat és utasításokat közlünk, s amelyen az eredményeket kiadja nekünk. Ezt a nyelvet a gép már közvetlenül „nem érti meg”. Szüksége van egy (saját gépi nyelven megírt) fordítóprogramra, mely a programnyelven leírt feladatot lefordítja gépi nyelvre, s fordítás után (vagy egyes esetekben fordítás közben) a gépi nyelvre lefordított feladatot már végre tudja hajtani. Végül, a legfelső szinten áll a szokásos szakmai nyelv (matematikai feladatoknál a matematikai formulanyelv), amelyen a szakember (azaz matematikai feladatoknál a matematikus) kezeli számításai és következtetései anyagát. A „szakmai anyanyelv”-ről programnyelvre történő átfogalmazás már általában számítógép-programozó szakember közbeiktatásával, azaz „emberi erővel” történik. A Varsóban 1959-ben rendezett matematikai logikai konferencián Kalmár vázolta egy általa elképzelt olyan számítógép struktúráját, amelynek „anyanyelve” közel áll a matematikai formulanyelvhez. Ez a gép tehát, amely később a szakirodalomban „Kalmár-féle formulavezérlésű számítógép” néven szerepel, fordítóprogram és programozó szakember közbeiktatása nélkül közvetlenül „megérti” és végrehajtja a matematikai formulanyelven megfogalmazott feladatot. Kalmár a későbbiekben is behatóan foglalkozott a formulavezérlésű számítógép tervezésével és elképzései továbbfejlesztésével; idevágó [63], [64], [67], [70], [71] munkái (9. és 10. ábra) mellett műszaki tervek is készített egy ilyen géphez, és ötletei felhasználásával a Szovjetunióban (Kiebben) meg is építették a gépet.

A formulavezérlésű számítógéppel kapcsolatos problémákon túlmenően Kalmár igen fontosnak tartotta az említett három nyelvtípus precíz tanul-

Über einen Rechenautomaten, der eine mathematische Sprache versteht

Von LÁSZLÓ KALMÁR

Auf dem Warschauer Symposium September 1959 über Grundlagen der Mathematik habe ich — der Richtung des Symposiums entsprechend vom rein theoretischen Standpunkt aus — über die Grundideen eines Rechenautomaten berichtet, der auf eine mathematische Formelsprache programmiert werden kann, indem er die einzelnen Zeichen seines in einer solchen Sprache geschriebenen Programmes nacheinander als Befehle ausführt. Hier berichte ich über eine praktisch mögliche Form eines solchen Automaten.

Werte von (ohne Weglassen von Klammern aufzuschreibenden) Termen — z. B. $((a \times d) - (b \times c)) / (x - y)$ — werden mit Hilfe einer Folge von Quadrupeln von Registern LOR_n , ROR_n (linke und rechte Operandenregister), OR_n (Operationsregister), ER_n (Ergebnisregister) berechnet ($n = 0, 1, 2, \dots$), deren „leerer“ Ausgangszustand verschieden von dem durch eine Zahl „gefüllten“ Zustand ist (auch wenn sie gleich Null ist). Werden LOR_n und ROR_n durch die beiden Operanden, OR_n aber durch die Schlüsselzahl einer Operation gefüllt, so werden die Operanden in die Eingangsregister des für die Berechnung des Operationswertes bestimmten Rechen-

9. ábra

A „Kalmár-féle formulavezérlésű számítógép” egyik ismertető tanulmánya [A. 67]

72

werkes (bei komplizierten Operationen des eingebauten Unterprogramms) übertragen, von dessen Ausgangsregister das Ergebnis nach vollendeter Berechnung in ER_n zurückübertragen wird. Für $n > 0$ geht es dann, unter gleichzeitiger Entleerung von LOR_n , ROR_n , OR_n und ER_n , in dasjenige der Register LOR_{n-1} und ROR_{n-1} weiter, welches im voraus mit ER_n „verbunden“ wurde.

Jede skalare (d. h. indexlose) Variable bezeichnet ständig den Inhalt einer festen Speicherzelle, die durch die Schlüsselzahl der Variablen adressiert wird. Als Befehl bewirkt eine skalare Variable die Übertragung des Inhalts dieser Zelle in das an die Reihe kommende (kurz: aktive) Register (bzw., falls ER_0 das aktive Register ist, seines Inhalts in jene Zelle nebst Entleerung von LOR_0 , ROR_0 , OR_0 und ER_0); in ähnlicher Weise bewirkt ein Operationszeichen die Übertragung seiner Schlüsselzahl in das aktive Register. Eine linke Klammer bewirkt als Befehl die Verbindung des aktiven Registers mit ER_n mit nächsthöherem n ; eine rechte Klammer bewirkt keinen Befehl. Ein $\Rightarrow$ -Zeichen als Befehl dient nur zur Übertragung des Wertes des auf seiner linken Seite stehenden Termes nach ER_0 im Falle, daß letzterer eine Variable ist oder eine Konstante als letzten Operanden besitzt. Eine Kennziffer des Registers, das als aktiv zu betrachten ist, wird in einem Steuerungsregister vermerkt, dessen Inhalt bei jedem Befehl in entsprechender Weise geändert wird.

Konstanten sind im Programm als Dezimalzahlen zu schreiben. Sie werden in einem Zahlenumrechner in (etwa binäre) Maschinenform umgewandelt. Da der hierzu nötige, den einzelnen Ziffern z entsprechende Befehl (nämlich: „multipliziere die bisher erhaltene Zahl mit 10 und addiere z “ bzw. „addiere zu der bisher erhaltenen Zahl das Produkt von z mit der entsprechenden negativen Potenz von 10“) davon abhängt, ob z vor oder nach dem Komma steht, wird dieser Umstand nebst dem „entsprechende Potenz von 10“ in einem besonderen Register notiert, dessen Inhalt durch das Komma bzw. durch die nachfolgenden Ziffern als Befehle entsprechend geändert wird.

In ähnlicher Weise werden die Adressen der (durch von den skalaren Variablen verschiedene Buchstaben mit einem, zwei oder mehreren Indizes bezeichneten) Matrizenelemente berechnet auf Grund des als Matrizennamen dienenden Buchstabens, sowie der wie oben berechneten Werte der Indizes. Zu diesem Zwecke wird vermittle der entsprechenden, im Programm figurierenden Matrizendeklaration, wodurch die Höchstwerte der Indizes der entsprechenden Matrizenelemente für den fraglichen Matrizennamen angegeben werden, mit Hilfe eines Registers, das stets die Minimaladresse der für die Matrizenelemente zur Verfügung stehenden Speicherzelle registriert, die Anfangsadresse und die Spannen der entsprechenden Matrizenelemente berechnet und zu einem Worte vereinigt, das dann in der durch die Schlüsselzahl des Matrizennamens adressierten Zelle gespeichert wird. Kommt nun im Programm ein entsprechendes Matrizenelement vor, dann wird durch den Matrizennamen als Befehl eine Aufteilung dieses Wortes nebst Übertragung seiner Bestandteile: Anfangsadresse und Spannen, in die entsprechenden Register eines Adressenberechners bewirkt. Die Berechnung der gewünschten Adresse läßt sich nunmehr durch Multiplikationen und Additionen ausführen. Das letzte Zeichen des Matrizenelementes, eine rechte Indexklammer, bewirkt als Befehl dasselbe wie eine skalare Variable, jedoch mit der im Adressenrechner berechneten Adresse in der Rolle der Schlüsselzahl der skalaren Variablen.

Einstellige elementare Funktionen werden durch die Angabe einer Kennziffer des entsprechenden eingebauten Unterprogramms als ersten und des Arguments der Funktion als zweiten Operanden einer festen, speziell zu diesem Zwecke dienenden Operation bezeichnet. Man darf aber auch die üblichen Bezeichnungen verwenden, vorausgesetzt, daß z. B. das Wort $\sin$, falls etwa 17 als Schlüsselzahl des entsprechenden Unterprogramms und etwa π als Operationszeichen

für die genannte spezielle Operation verwendet wird, in gleicher Weise wie (17) verstanden wird (das Fehlen der rechten Klammer in $(17 * x, \text{ d. h. } \sin x, \text{ stört nicht})$).

Die Wahrheitswerte von Formeln (z. B. $(\text{abs. } (x - \bar{x}) < \epsilon) \vee ((x < 0) \wedge (y < 0))$) werden in der gleichen Weise wie die Werte der Terme berechnet, indem die beiden Vorzeichen als Wahrheitswerte verwendet werden. Dadurch wird das Einbeziehen von bedingten Sprunganweisungen ins Programm ermöglicht und auch das Einbeziehen von unbedingten Sprunganweisungen, indem der Inhalt von ER_0 im leeren Zustand etwa als positiv angesehen wird. Die Bezugsnummern werden ebenfalls im Zahlenumrechner umgewandelt und dann, auf Grund der Wirkung des zwischen der Bezugsnummer und der entsprechenden Anweisung stehenden Zeichens (etwa:) bzw. (in Sprunganweisungen) des nach der Bezugsnummer stehenden Sprungzeichens als Befehl, in entsprechender Weise verwendet (zur Übertragung des Inhalts des Befehlszählers in ein durch die Bezugsnummer gekennzeichnetes Register bzw. des Inhalts dieses Registers in den Befehlszähler).

Die Schlüsselzahlen der nacheinanderfolgenden Zeichen des Programmes werden als Komponenten eines „Programmvektors“ (d. h. Matrizen mit einem Index) gespeichert; statt einer entsprechenden Matrizendeklaration wird die Anzahl dieser Zeichen während des Ablesens des Programmbandes (oder der Programmkarten) gezählt. Dadurch wird die Modifikation der Befehle durch das Programm selbst ermöglicht.

5

10. ábra

A 9. ábrán hivatkozott tanulmány [A. 67] második oldala

73

mányozását, egymással való rokonságuk megvilágítását, továbbá e nyelvek egymáshoz közelítését a gépek jobb kihasználhatósága érdekében. Első, ezzel kapcsolatos elképzeléseit az 1960-ban rendezett II. Magyar Matematikai Kongresszuson ismertette [64].

Első közelítésben egy (gépi vagy beszélt) nyelvet a nyelv szintaktikailag (mondattanilag) helyes mondatai alkotják. Egy programozási nyelven megírt feladat rendszerint tartalmaz hibákat (tévedni emberi dolog). A hibakeresést nagymértékben megkönnyíti, ha a szintaktikai hibák, azaz a „nyelvtanilag vagy mondattanilag helytelen mondatok” felismerése gépi elemzés útján történik²³ A Chomsky-féle generatív grammatikák [76] rendkívüli jelentőségét felismerve Kalmár a 60-as évek elejétől behatóan foglalkozott egy új határtudománnyal, amit ő „matematikai nyelvészet”-nek hívott.²⁴ Később ebből a határtudományból elkülönülve fejlődött ki a formális nyelvek matematikai elmélete. A formális nyelvek definiálására Kalmár gráfokkal történő szemléletes áttekintés útján ajánlott új módszert több dolgozatában, illetve nemzetközi konferenciákon tartott előadásában [84], [93], [96].

A formális nyelvek matematikai elméletének egyik legelterjedtebb alkalmazási területe a programnyelvek szintaktikai elemzése. A szintaxis azonban nem rendel a programokhoz jelentést. A programnyelvhez (és a beszélt nyelvhez is) a programok (beszélt nyelvnél a szöveg) jelentését a szemantika definiálja. Egy programozási nyelv akkor teljes, ha annak szintaxisát és szemantikáját is megadjuk. Az 1967-es, Budapesten rendezett szimpóziumon Kalmár matematikai logikai eszközökkel kimutatja, hogy a program jelentése (szemantikája) bizonyos szempontból a program gépi nyelvre fordításának szinonimájaként tekinthető [88].²⁵ Kalmár ezzel a művével, továbbá ennek [83]-beli változatával a (természetes, beszélt) nyelvek általános elméletéhez is hozzájárult. [84] munkájában a (beszélt és gépi) nyelvet egy bonyolult absztrakt algebrai struktúraként vizsgálja. [76]-ban matematikai és nyelvi struktúrák

közötti analógiákat taglal.²⁶ Az átfogó jellegű kérdéseken túl Kalmár részletekbe menően is foglalkozott a (gépi és beszélt) nyelvekkel. [95] dolgozata az

- 23 Az első programozási nyelv, melynek szintaxisát egy definíciós nyelv létrehozásával alkották meg, az 1960-ban publikált, majd 1962-ben véglegesített ALGOL 60. A 60-as évek közepén már általánosan el volt terjedve a programok gépi úton történő szintaktikai elemzése.
- 24 Már 1964-től Kalmár nyelvész és matematikus hallgatóság részvételével szemináriumokat tartott a matematikai nyelvészetről, s hangoztatta azt az akkoriban igen furcsának tartott elképzelését, hogy mindkét tudományág (azaz a nyelvészet és a matematika) eredményei és módszerei hasznosan alkalmazhatóak a másikban. Matematikai nyelvészeten ma már inkább a nyelvészet egy matematikai eszközökkel dolgozó tudományágát értik, míg a nyelvészeti eszközöket használó matematikai tudományágat a formális nyelvek matematikai elméletének hívják.
- 25 Kalmár tanítványai, elsősorban *Makay Árpád* és *Simon Endre* a 70-es évek elejétől kiterjedt kutatásokat folytattak a szemantikai módszerek és modellek területén is.
- 26 *Jékel Pál* és *Papp Ferenc* matematikai nyelvészeti kutatásai is az ő ilyen irányú munkásságának hatására indultak el.

ALGOL 60 programozási nyelv egy fogyatékoságát igazítja ki. Foglalkoztatta a magyar nyelvten és elsősorban a magyar igeragozás (idevágó eredményeit sajnos nem publikálta)²⁷. [89] munkájában azt a kérdést vetette fel, hogy nem kellene-e a matematikai jelölésrendszert a gépi nyelvekhez közelíteni. [90]-ben a programozási nyelvekkel kapcsolatos további teendőket tárgyalja.

Sokat foglalkoztatta az a kérdés is, hogy a számítógépek belső leírása hogyan hozható kapcsolatba a modern algebra fogalomrendszerével. A modern algebra a „tisztá” elméleti matematika egy ága. Kalmár Lászlót behatóan foglalkoztatta már a 60-as évek első felében az a paradoxon, hogy az algebra éppen a magas szintű absztrakció folytán vált gyakorlati jellegű problémák megoldására is alkalmas tudományággá. A 60-as években kibontakozott automataelmélet ma már a számítástudomány szerves részeként van számontartva, ennek az elméletnek az automatikus működésű diszkrét rendszerek tanulmányozása a célja (modern algebrai módszerekkel).²⁸ Kalmár több dolgozatban mutatta meg [78], [79], [80], [97], hogy a számítógépek belső leírása hogyan illeszthető be a modern algebra és az akkoriban kibontakozó automataelmélet kereteibe. Algebrai eszközökkel bizonyította például, hogy az absztrakció egy viszonylag magas szintjén a számítógép egy olyan kétütemű automatikus működésű diszkrét rendszernek (kétütemű automatának) tekinthető, mely első ütemében passzívan fogadja a külvilág bemenő információit, majd második ütemében (esetleg végtelen sokáig) a külvilág hatásaitól függetlenül, saját belső törvényszerűségeinek megfelelően működik.²⁹

Habár sokat foglalkoztatták az automataelmélet elméleti és gyakorlati aspektusai, az írásos Kalmár-életmű ezt kevésbé tükrözi. [72] dolgozatában az olyan automaták — Neumann János által felvetett — elméletébe kapcsolódott be, amelyek elég bonyolultak ahhoz, hogy önmagukat reprodukálni képesek legyenek (feltéve, hogy energiát és megfelelő alkatrészeket kapnak a külvilágtól). A Kalmár-féle önreprodukáló automata-típus gyakorlati kivitelezése

is lehetségesnek látszik. Szorgalmazta a folytonos (azaz nem diszkrét, hanem valós időskálával dolgozó) automaták elméletének megalapozását. Meglátta — bár mélyebben nem vizsgálta — a formális nyelvek és automaták kapcsolatának fontosságát (ennek a problémakörnek ma már kiterjedt irodalma van). *Frey* Tamás számára adott szellemes példája, mely szerint a véges állapotú automata nem képes egy tetszőleges bemenő jelsorozat tükörképét kiadni

- 27 Egy időben szavajárása volt: „hogya a magyar igeragozás nem lenne, akkor ki kellene találni”.
- 28 A Kalmár környezetében kialakult szegedi automataelméleti iskola is a hatvanas évek első felében kezdte meg ezirányú kutatásait *Csákány* Béla, *Gécseg* Ferenc, *Peák* István és *Ádám* András közreműködésével, majd később más, fiatalabb kutatók is bekapcsolódtak.
- 29 A Kalmár-féle többütemű automatát, melynek a kétütemű automata speciális esete, *Gécseg* Ferenc vizsgálta behatóan [C. 5].

kimenő jelsorozatul, mutatja, hogy a Kalmár-féle kétütemű automatát általában nem célszerű speciális véges automatának tekinteni.

A 60-as évek közepétől az alakfelismerés területén is folytatott kutatási tevékenységet. A kibernetikának ez az ága azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy alakzat, tárgy vagy jelenség felismerése (élőlény, számítógép, vagy robot által) hogyan történik, illetve történhet. A Namurben 1967-ben tartott ötödik nemzetközi kibernetikai kongresszuson Kalmár összefoglaló jellegű előadásban ismertette a témával kapcsolatos elképzeléseit [87].^{30,31}

Sokat foglalkoztatták a kibernetika biológiai és orvostudományi vonatkozásai is. [68] munkájában a matematikai módszerek biológiai és orvostudományi alkalmazásának jelentőségét taglalja. Több szerzővel közösen írt [85] dolgozatában az élő szervezetek és környezetük közötti biológiai egyensúly szabályozásának egy kibernetikai modelljét írja le. [91]-ben a számítógépek és kibernetikai célgépek orvosi diagnosztikában történő alkalmazhatóságát hangsúlyozza.

Rendes taggá választását követő akadémiai székfoglaló előadásában [73] Kalmár László az információelmélet olyan irányú továbbfejlesztésére hívta fel a figyelmet, amely a jelek, jelsorozatok alakjában továbbított információ mennyiségi vizsgálatán túllépve az átvitt információ tartalmi és minőségi vonatkozásaival foglalkozik (11. ábra). Ez az általa „kvalitatív információelmélet”-nek hívott tudományág a legtöbb vonatkozásában még ma is kidolgozásra vár.

Kalmár László fontos feladatának tartotta a kibernetika általános kérdéseinek, ezen belül a kibernetika tárgyának és módszereinek tisztázását. [66] dolgozatában kifejtett véleménye szerint a kibernetika főképpen az anyagi rendszerek szervezésének és az ilyen rendszereken belüli információfeldolgozásnak azon általános törvényszerűségeivel foglalkozik, amelyek függetlenek az anyag speciális mozgásformáitól. Ennek az 1960-ban megjelent definíciónak az adott

különös hangsúlyt, hogy az 50-es évek szocialista országokban burjánzó tudománypolitikai dogmatizmusa a kibernetikát hivatalból üldözendőnek tekintette, hiszen a megfellebbezhetetlen sztálini ítélet szerint: „a kibernetika burzsoá áltudomány, az imperializmus szellemi fegyvere az ideológiai téren folyó osztályharcban.” A 60-as évek első felében a Magyar Tudományos Akadémia elnökségi szinten foglalkozott a kibernetika tárgyának és módszereinek körülhatárolásával. Az 1963-ban megszületett akadémiai meghatározás lényegében Kalmár László véleményét tükrözi: „A kibernetika a vezérlésnek és a szabályozásnak, továbbá az információ ezzel kapcsolatos gyűjtésének, tárolásának, feldolgozásának

30 Az első általános alakfelismerési programrendszer jóval később, 1975-ben készült el az Egyesült Államokbeli Seattle egyetemén (Washington tagállam). Bár közvetlen kapcsolat nem mutatható ki a programrendszer kidolgozói és Kalmár munkássága között, a megvalósított rendszer nagymértékben hasonlít Kalmár elképzeléseihez.

31 Alakfelismerés területén tanítványa, Csirik János ért el jelentős eredményeket.

A KVALITATÍV INFORMÁCIÓELMÉLET PROBLÉMÁI

(SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁS)*

Írta: KALMÁR LÁSZLÓ

Az információmennyiség fogalma — néhány, kb. 20 évvel régebbi kezdeményezés¹ után — 1948-ban merült fel,² elsősorban a híradástechnika szükségletei folytán. Az azóta eltelt idő bebizonyította, hogy ez a fogalom nemcsak a híradástechnika számára hasznos, hanem a műszaki tudományoktól — ahol a híradástechnikán kívül elsősorban a mérés-technikában és az automatikus vezérlés tudományában nélkülözhetetlen — a számítástechnikán és a biológián keresztül egészen a nyelvtudományig és az államigazgatásig a természettudományok és a társadalomtudományok számos területén alapvető jelentőségű fogalom.

Nyilvánvaló azonban, hogy az információmennyiség fogalma az információnak csak egyik, kvantitatív oldalát tükrözi és így a ráépített *kvantitatív* információelmélet is csak egyik aspektusát vizsgálja az információnak. Akármilyen fontos is pl. a gazdaságos és megbízható hírtovábbítás szempontjából a továbbítandó híryanag információmennyiségének ismerete, annak számára, aki a hírt megkapja, sokkal fontosabb az, vajon születésről vagy halálesetről szól-e a hír. Akármennyire fontos is, hogy valamely automata gépsor vagy izomcsoport vezérlése esetén lehetőleg semmi se vesszen el a vezérlőmű, ill. a központi idegrendszer által küldött vezérlőjelek és a visszajelentő-jelek információtartalmából a huzalos, ill. az idegpálya-vezetékekben, éppoly fontos az is, hogy a vezérlő- és visszajelentő-jelek torzítatlanul érkezzenek meg, hogy valóban a szükséges akciót válthassák ki. Hasonlóan, valamely szövegnek más nyelvre való lefordítása során nemcsak az a fontos, hogy a lefordított szöveg lehetőleg ugyanakkora információmennyiséget tartalmazzon, mint az eredeti szöveg, hanem az is, hogy ugyanazt jelentse. A példákat tetszés szerint lehetne szaporítani a tudomány vagy a gyakorlat különböző területéről; azonban, úgy vélem, már a felsoroltak is eléggé mutatják az információ *kvalitatív* aspektusa figyelembevételének jelentőségét.

Az lehetne azonban gondolni, hogy a matematikai információelméletre csak az információ mennyiségi oldala, az információmennyiség különböző mértékeinek és azok tulajdonságainak vizsgálata tartozik, az információ kvalitatív vizsgálata pedig minden egyes esetben kizárólag annak a tudománynak a feladata, amelyhez az

információ által éppen közvetített hír jelentésénél fogva tartozik. Ez a vélemény azonban nem veszi figyelembe azt, hogy a matematikát tévedésből szokták magyarul „mennyiségtannak” nevezni. A matematika sohasem szorítkozott tisztán kvantitatív

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok 1962 június 28-i felolvasó ülésén.

¹ L. pl. R. V. HARTLEY, Transmission of information, *The Bell System Technical Journal*, 7 (1928), 535–563. old.

² C. E. SHANNON, A mathematical theory of communication, *The Bell System Technical Journal*, 27 (1948), 379–423, 623–653. old.; C. E. SHANNON–W. WEAVER, *The mathematical theory of communication*, Urbana, 1949; N. WIENER, *Cybernetics*, New York, 1948.

1 III. Osztály Közleményei XII/4

11. ábra

Kalmár azon tanulmánya, amely a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjakénti székfoglaló előadásának anyagából készült [A. 73]

77

és továbbításának olyan általános törvényszerűségeit kutatja, amelyek a vezérelt vagy szabályozott anyagi rendszer legkülönbözőbb mozgásformája esetén, a mozgásforma specifikus mozgástörvényeivel együttes hatásban érvényesülnek.” A 60-as évek végén [92] és [94] dolgozataiban Kalmár ismét visszatér ehhez a problémakörhöz. „A kibernetika alkalmazásainak célja . . .” — írja [94] munkájában — „ . . . az, hogy azokat a gépies feladatokat, amelyek elvégzésére ma még agyunkat vesszük igénybe, gépekre bizzuk, s ezzel az emberi agyat felszabadítsuk olyan tevékenység végzésére, amit a társadalom és a technika adott fejlettségi foka mellett csak az alkotó emberi agy tud elvégezni.” (A szerk. kiemelése.)

4. A matematika néhány más ága

A [14] cikkben a számelmélet alaptételére (arra az állításra, hogy bármely természetes szám egyértelműen állítható elő törzsszámok szorzataként) az alábbi tény, az ún. négy számtétel felhasználásával adott Kalmár tanulságos új igazolást: ha az a, b, c, d számok olyanok, hogy $ab = cd$, akkor vannak olyan t, u, v, w számok, hogy $a = tu, b = vw, c = tv$ és $d = uw$. (L. az 1. táblázatot.)

	c	d
a	t	u
b	v	w

Több Kalmár-munka foglalkozik az *analízis* és az analitikus számelmélet körébe vágó kérdésekkel. Első közleménye (amelynek anyaga doktori értekezésül is szolgált) a komplex változós függvények interpolációs kérdéseit vizsgálja. Az [5], [6] cikkekben az $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ összegre adott analitikus becslést, ahol $f(n)$ azt a számot jelöli, hogy n hányféle módon bontható (akár-hány tényezős) szorzattá az egész számok tükrében.

Göttingeni tanulmányútja idején egy egyszerű tárgyalásmódot biztosító hasznos ötlettel járult hozzá ahhoz a [C. 8] könyvhöz, amelyet akkoriban Edmund Landau az analízis (és bizonyos mértékben a számelmélet) megalapozásáról írt. Amikor az előszóban a szerző köszönetet mond ezért Kalmárnak, így méltatja (a könyv egy problematikus pontjával kapcsolatos) közreműködését: „In letzter Stunde erfuhr ich aber einen sehr viel einfacheren Beweis von Dr. Kalmár in Szeged; jetzt sieht die Sache so einfach und der Beweis den übrigen Beweisen des ersten Kapitels so ähnlich aus, dass auch der Kenner

78

diese Pointe nicht gemerkt hätte, wenn ich nicht mein obiges Geständnis von Schuld und Sühne so ausführlich zu Protokoll gegeben hätte.”³²

Az analízis alapkérdéseivel foglalkozó [36], [37] munkái közül az egyikben Kalmár olyan új bizonyítást adott Cauchy konvergencia-kritériumára, amely nem használja fel a Bolzano—Weierstrass-tételt.

A [8] dolgozat a legalább ötödfokú *algebrai egyenletek* általános megoldhatatlanságát kimondó Ruffini—Abel-féle tétel tárgyalását egyszerűsíti. Később gondolatébresztő előadást tartott az *általános algebráról*, az algebra legmagasabb absztrakciós fokú irányzatáról [50].

A [2] dolgozat az ún. *játékelmélet* (game theory) kimunkálásával foglalkozó legkorábbi cikkek egyike. Ez a terület — amelynek művelésébe Kalmár nem kapcsolódott be többet — később Neumann János, Oskar Morgenstern és mások munkássága révén kiterjedt matematikai ággá fejlődött. Ez a diszciplína a (különböző jellegű) konfliktus-szituációkra vonatkozó stratégiák precíz elméletét jelenti, és így egyebek mellett a közgazdaságtanban is fontos alkalmazási lehetőségekhez jut.

A *Hajnal* Andrással együtt írt [52], [53] cikkek a *halmazelmélet* Gödel-féle axiómarendszerét egyszerűsítik azáltal, hogy rámutatnak: Gödel axiómáinak egyike felesleges, minthogy tételként nyerhető a többi axiómák alapján. Az [53] publikációról az amerikai referáló folyóiratban megjelent ismertetés³³ végén — a közlemény részletes tartalmi ismertetése után — a referens e mondatban ismeri el a szerzők előadásmódjának érdemeit: „The representation distinguishes itself by all the qualities of a scientific representation, e. g. by lucidity, caution, simplicity and completeness.”³⁴

5. Oktató és szervező tevékenysége

Kalmár László rendkívüli oktató- és szervezőkészsége már egyetemi tanul-

mányai során megmutatkozott. Sokirányú érdeklődésére jellemzően tudományegyetemi előadások mellett rendszeresen hallgatott műegyetemi előadásokat, sőt az arra érdemesnek tartott magántanári előadásoknak is szorgalmas hallgatója volt. A hallottakról részletes jegyzeteket készített, feladatokat szerkesztett, s jegyzeteit át meg átformálva tanította és segítette a hozzá fordulókat.

1927-ben a szegedi egyetemre kerülve lelkesen kapcsolódott be az oktatómunkába. Oktatói pályája kezdeti időszakában az algebra és számelmélet

32 „Az utolsó órában azonban hozzájutottam Kalmár doktornak (Szegeden) a sokkalta egyszerűbb bizonyításához; a tárgy most annyira egyszerűnek látszik és a bizonyítás annyira hasonlít az első fejezet többi bizonyításaihoz, hogy a szakértő sem venné észre ezt az ötletet, ha azáltal, amint a bűnt és bűnhődést az imént bevallottam, erről gondosan számot nem adtam volna.”

33 Mathematical Reviews, 18. kötet, 269. old.

34 „A tárgy kifejtése kitűnik a tudományos kifejtés minden jótulajdonsága, így a világosság, körültekintés, egyszerűség és teljesség tekintetében.”

79

tárgyának előadásait tartotta programszerűen, emellett szívesen hirdetett speciálkollégiumot a matematika különféle ágaiból, ha az illető ág iránt érdeklődés mutatkozott. (Ehhez hozzásegítette az, hogy gyorsan és alaposan volt képes áttekintést szerezni korábban öelötte is ismeretlen területekről.) Például a (kutatási körétől távolabb álló) valószínűségszámításról is tartott előadásokat, főként pedig — ami oktatói arculatát tartósan meghatározta — rátért a matematikai analízis előadásainak vitelére. A későbbi években fáradhatatlanul magyarázta akkori legkedvesebb tárgya, az analízis „rejtelseit”. (Nagy sikerként könyvelte el, ha az akkori matematikuskörökben „butának” tartott vegyészhallgatókat rávezette a megtanulhatatlannak tartott matematikai összefüggések megértésére.) A negyvenes évek végén matematikai módszertani speciálkollégiumot is tartott.

Hosszú egyetemi pályafutása során kezdettől fogva fontosnak tartotta a tehetségek felkarolását és biztatását. Személyesen neki köszönhető, hogy egyetemi évfolyamtársa, a matematikától egy időre elfordult Péter Rózsa a harmincas évek elejétől megkezdte a rekurzív függvények kutatása területén folytatott (később tündöklően felívelő) pályafutását. Egyengette az 1931-től Szegeden tanuló Grünwald Géza útját is. Még ugyanezen év őszén felkereste a 18 éves (ma a világ legkiemelkedőbb matematikusai közé számító) Erdős Pál, akinek egy — saját bevallása szerint rosszul és pontatlanul fogalmazott — kéziratát elolvasva „... nem sajnálta a nem csekély fáradságot, hogy a bizonyítást «tisztába rakja» és a ki nem mondott lemmákat megfogalmazza”. Erdős Pál későbbi disszertációját ugyancsak átfogalmazta és jól érthető formába öntötte (l. [B. 11]). Figyelemmel kísérte Turán Pál és Szekeres György pályakezdését is, és hosszú levelekben hasznos tanácsokkal látta el őket. Az 1941-ben Szegedre került Szele Tibor felkarolásán is sokat fáradozott, s Rédei László mellett elsősorban ő volt az, aki a kiváló kombinatorikai képességekkel rendelkező

Szelet bevezette a tudományos kutatás módszereibe, és emberileg is támogatta. Szelével annak 1948-beli Debrecenbe visszakerülése után is tartotta a kapcsolatot, szegedi letelepedésre is biztatta.

A 30-as évek közepére már szakmai tekintélynek számító Kalmárhoz a legkülönbözőbb területeken dolgozó matematikusok fordultak kérdéseikkel, és kaptak munkájukat előbbre vivő — nem ritkán 30—40 oldalból álló — levélbeli választ. Önálló tudományos eredményeinek közlése mellett már ekkor is nagy gondot fordított arra, hogy a matematika oktatását hatékonyabbá tevő, továbbá egy-egy kevésbé ismert témakört feltáró és megkedveltető tárgyú dolgozatokban is kifejtse véleményét. Kiterjedt publikációs tevékenysége és szakmai levelezése mellett baráti társaságban — esetenként tipikusan nem-matematikus hallgatóság előtt — szívesen beszélt matematikai problémákról és ezen problémák matematikán túlmutató vonatkozásairól. A 30-as évek második felétől tevékenyen részt vett az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat társulati életében, ahol egyéb tevékenységei mellett „vidéki tagtárs” létére előadóként is rendszeresen szerepelt a rangos előadóüléseken. 1936-ban

méltán nyerte el a társulat König Gyula-jutalmát. A jutalom kapcsán írt, munkásságát elemző jelentés önmagáért beszél:

„... munkássága bővelkedik fontos és érdekes eredményekben, és így a velük való foglalkozás sok tanulsággal is jár. Ő sokoldalú matematikus és produktói nem korlátozódnak a matematika valamely speciális fejezetére. Nagy tudásával a matematika bármely területén otthonosan mozog és erős kritikai érzékével a lényegest a lényegtelenről könnyen szétválasztva, megtalálja a problémák megoldásának legrövidebb útját.”

Pályájának új lendületet adott a felszabadulás után kibontakozó aktív tudományos élet. Tevékenyen részt vett a háború alatt elkallódott matematikai művek felkutatásában és összegyűjtésében. Vezető szerepet játszott a Bolyai János Matematikai Társulat megalakításában, része volt a magyar nyelvű szakfolyóiratok (Matematikai Lapok, Középiskolai Matematikai Lapok, A Matematika Tanítása) megindításában. A matematika egy-egy klasszikus eredményét elemezve több esetben talált annyira egyszerű megközelítési módokat, hogy ezeket a Középiskolai Matematikai Lapokban publikálhatta (1947 és 1950 között)! Jellemző módon egyik cikksorozatának ez a címe: „Gyertek, bizonyítsuk be Csebisev tételét!” [26].

Buzdította és bátorította a felszabadulás után egyetemre kerülő hátrányos helyzetű munkás- és parasztfiatalokat. Volt ekkoriban egy időszak, amikor (együttérzését hangsúlyozva) bajuszt növesztett, mellényben és ingujjban járt be az egyetemre tanítani, az órák előtt hallgatóságával együtt népdalokat énekelt. Mint lelkes pedagógus, a 40-es évek végétől küzdelmet indított a matematika tanításában megnyilvánuló, az élettől elszakadt formalizmus ellen. Szegeden már 1950-ben megjelent a színes példákkal és magyarázatokkal tarkított, kétkötetes analízisjegyzete, amely át- meg átdolgozott formában később többször is kiadásra került.

A Bolyai Társulatnak az analízis oktatásáról tartott 1952-es ankétján részletesen kifejtette az e témával kapcsolatos nézeteit és tapasztalatait. Véleménye szerint a jobb megértés érdekében fokozatosan kell bevezetni a matematikai fogalmakat, nagyszámú példával szemléltetve. Tanítási módszerét elvileg helyesnek találták, csupán a módszer alkalmazásának túlzásba vitelével szemben voltak fenntartásaik egyes kollégáinak.

Az ötvenes évek első felében szorgalmazta az analízis módszereinek középiskolai szinten történő tanítását is. Erről 1953-ban cikksorozatot írt „A matematika tanítása” folyóiratba [46]. A matematika alapjairól írt jegyzetének szintén 1953-ban jelent meg az első kötete, majd 1954-ben a második kötet. Ebben az időszakban különösen élénken tevékenykedett a matematika népszerűsítésének területén. Számos matematikai területről tartott népszerű előadásokat Budapesten, Debrecenben és Szegeden (többnyire a Bolyai Társulat keretein belül), emellett patronálta és rendszeresen látogatta a Bolyai Társulat pécsi tagozatát. A matematikai előadásaihoz csatlakozó kötetlen beszélgeté-

seken az őt foglalkoztató legkülönfélébb közéleti és tudományos kérdések is szóba kerültek.

Az ötvenedik évét betöltő Kalmár László érdeklődése 1955 körül újabb területek: a matematikai kibernetika és a számítástudomány felé fordult. Már 1960-tól oktatta — Magyarországon elsőként — a számítógépek³⁵ programozását a szegedi egyetemen. A gépi nyelv oktatásához kidolgozott egy szimbolikus nyelvet,³⁶ amit mai szóhasználattal „Kalmár-féle assembly nyelv”-nek hívhatnánk. (Ezen előadásaiból, sajnos, sem egyetemi tankönyvet, sem jegyzetet nem készített.) Ezek a tudományágak akkoriban rohamos fejlődésüknek még a kezdeti szakaszában jártak, és ő szívügyének tekintette, hogy az egyetemi hallgatóság a lehető legmodernebb képzésben részesüljön. A kül- és belöldi konferenciákon (amelyeknek rendszeres résztvevője volt) nem sajnálta a fáradságot az előadások szorgalmas jegyzetelésére. Hazatérte után nemcsak kollégáinak adta tovább az így összegyűjtött anyagot, hanem hamarosan beépítette egyetemi előadásaiba is.³⁷ Közvetlen munkatársain és általában a matematikusokon kívül más tudományok művelőit is buzdította a kibernetika és a számítástudomány gazdagítására.³⁸ E tudományterületek népszerűsítésére is nagy súlyt helyezett. Ismeretterjesztő előadásokat tartott, kapcsolatban állt a szakemberekkel, és mindezek mellett volt olyan időszak, amikor egy egész általános iskolai osztályt vett gondoskodása alá, külön-külön leveleket írva az osztály tanulóinak.

Azt az összefoglaló képet, amelyet a II/b. szakasz végén Kalmár Lászlóról, mint a matematikai kibernetika és a számítástudomány magyarországi megalapozójáról adtunk, kiegészíthetjük annak említésével, hogy e tudományágak első (s egyben legkiválóbb) oktatója volt, és hogy minden lehetséges fórumon kiállt ezen diszciplínák alkalmazásaiért és alkalmazóiért, sokszor már csaknem egyedül szállva szembe a közömbös vagy éppen ellenséges hangulatú kö-

- 35 A számítógépeket az ötvenes évek végéig Magyarországon többnyire matematikai gépeknek, majd elektronikus számológépeknek hívták. Kalmár sokáig (a hetvenes évek elejéig) ragaszkodott a „számológép” elnevezéshez, mert szerinte ezek a gépek csak akkor lennének „számítógép”-ek, ha megvolna az emberre jellemző kreatív képességük. Az elnevezéssel kapcsolatban még akadémiai vitát is kezdeményezett. Az Akadémia állást foglalt a „számológép” elnevezés mellett. Ennek ellenére a hatvanas évek végére a „számítógép” elnevezés terjedt el, s azóta „számológép”-en többnyire egyszerű kalkulátorokat értenek.
- 36 Ezt a nyelvet nem egy meglevő, hanem egy általa elképzelt fiktív gépre készítette el. A nyelvet jóval később, a hatvanas évek vége felé tanítványa, *Simon Endre* implementálta a *Minszk*—22 típusú számítógépen.
- 37 Például 1968-ban már egyetemi előadások anyagában oktatta a végleges formájában csupán 1969-ben publikált ALGOL 68 programozási nyelvet.
- 38 Például a filozófus *Székely Sándor*t, az orvos *Csernay László*t, a nyelvész *Papp Ferenc*et.
- 39 Kiharcolta, hogy a szovjet tervek alapján megépített első magyar számítógép 1965-ben a szegedi egyetemre kerüljön. Megszervezte a szegedi Kibernetikai Laboratóriumot, létrehozta Szegeden a programtervező matematikus szakot és nemzetközi színvonalon oktatta annak hallgatóit stb.

Befejezésül arról említünk meg néhány adatot, hogy Kalmár László mennyire intenzíven kapcsolódott be már munkássága kezdetétől fogva a nemzetközi matematikai életbe. Már 1932-ben részt vett és előadást tartott a Zürichben rendezett II. nemzetközi matematikai kongresszuson. 1948-ban Amszterdamban a X. nemzetközi filozófiai kongresszuson számolt be eredményeiről. Az ötvenes években a Szovjetunióban, Lengyelországban, a Német Demokratikus Köztársaságban, Kínában tartott előadásokat, illetve előadássorozatot. Részt vett az 1957-es amszterdami, az 1958-as namuri, az 1958-as varsói matematikai, illetve kibernetikai kongresszusokon. 1963-tól rendszeresen részt vett a Nemzetközi Tudománytörténeti és Tudományfilozófiai Unió Logikai, Metodológiai és Tudományfilozófiai Osztályának munkájában, később már mint az osztály vezetőinek egyike. A hatvanas évektől kezdve szinte évente (vagy még sűrűbben) járt külföldi konferenciákra.⁴⁰ Nemzetközi fórumokon is szót emelt a kibernetika és a számítástudomány ügyéért, felhívta a figyelmet a magyar szakemberek eredményeire. Résztvevője és szervezője volt Magyarországon rendezett több nemzetközi szakmai kollokviumnak, buzdítással és segítséggel mozdította elő a fiatalabb korosztályba tartozó magyar kutatók nemzetközi rendezvényeken való szereplését.

*

A jelen munka elkészítéséhez nyújtott segítségükért a szerzők hálás köszönettel tartoznak *dr. Kalmár Lászlónénak*, *Surányi János* egyetemi tanárnak, a matematikai tudományok doktorának, és a hivatalos lektornak, *Makay Árpád* kandidátusnak.

IV. Irodalom

Az irodalomjegyzék három részre tagolódik. Az *A* részben Kalmár László tudományos közleményeit soroljuk fel, közöttük (utolsóként) az egyetemi jegyzete nyomán összeállított könyvet. A nyomtatásban megjelent előadáskivonat jellegű és hozzászólás jellegű munkái közül csak azok szerepelnek a jegyzékben, amelyekre a szövegben hivatkoztunk is (az ilyenek teljes felkutatása eléggé kilátástalannak látszik). A *B* részben a Kalmár személyével foglalkozó

- 40 Tevékenységi tempójának érzékeltetésére hadd soroljuk fel egyetlen éven belüli utazásait. 1967 augusztusában Grenoble-ban részt vett a „Nyelvi adatok számítógépes feldolgozása” konferencián, majd az Aiguilles-i Nemzetközi Formális Nyelvészeti Szemináriumon, a Párizsban rendezett Nemzetközi Formális Nyelvészeti Napok-on. 1967 elején Tihanyban a Rekurzív Függvények és Alkalmazásaik nemzetközi kollokviumnak, szeptember végén Namurban az V. Nemzetközi Kibernetikai Kongresszusnak volt résztvevője. 1967 decemberétől négy hónapon keresztül vendégelőadója volt Kanadában a Waterloo-i Egyetemnek. 1968 májusában Angliában tartott szemináriumokat a matematikai logika köréből.

6*

83

munkák bibliográfiáját adjuk. A *C* rész a további hivatkozásokat tartalmazza. A szövegben az *A* felsorolás tételeire csupán sorszámmal, a két további jegyzékben szereplő munkákra [B. 11], [C. 6] alakban utalunk.

(A)

1. Az interpolációról. *Math. és Phys. Lapok* 33 (1926), 120—149.
2. Zur Theorie der abstrakten Spiele. *Acta Sci. Math.* 4 (1928), 65—85.
3. Über die Abschätzung der Koeffizientensumme Dirichletscher Reihen. *Acta Sci. Math.* 4 (1929), 155—181.
4. Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie. *Acta Sci. Math.* 4 (1929), 248—252.
5. A „factorisatio numerorum” problémájáról. *Mat. és Fiz. Lapok* 38 (1931), 1—15.
6. Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen, I. *Acta Sci. Math.* 5 (1931), 95—107.
7. Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem. *Acta Sci. Math.* 5 (1932), 222—236.
8. Ein Beweis des Ruffini—Abelschen Satzes. *Acta Sci. Math.* 6 (1932), 59—60.
9. Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses (Zürich, 1932)*, II. 337—338.
10. Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zahlausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten. *Math. Ann.* 108 (1933), 466—484.
11. Über einen Löwenheimschen Satz. *Acta Sci. Math.* 7 (1934), 112—121.
12. Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls. *Acta Sci. Math.* 7 (1935), 222—243.
13. Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen. *Compositio Math.* 4 (1936), 137—144.
14. A számelmélet alaptételéről. *Mat. és Fiz. Lapok* 43 (1936), 27—45.
15. Zur Reduktion des Entscheidungsproblems, *Norsk Mat. Tidsskrift* 19 (1937), 121—130.
16. Jelentés az 1938. évi König Gyula-jutalomról. *Mat. és Fiz. Lapok* 45 (1938), 1—17.
17. On the reduction of the decision problem, I: Ackermann prefix, a single binary predicate. *J. Symbolic Logic* 4 (1939), 1—9.

Acta Sci. Math. 9 (1940), 227—232.

18. On the possibility of definition by recursion. *Acta Sci. Math.* 6 (1940), 577—588.
19. A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei és eredményei. *Mat. és Fiz. Lapok* 48 (1941), 65—119.
20. A matematikai exaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig.⁴¹ *A másik ember felé, Debrecen (Exodus)* (1942), 39—58.
21. Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára. *Mat. és Fiz. Lapok* 50 (1943), 1—23.
22. Néhány szó a matematikáról azokhoz, akik világeletükben utálták, I—II.
I. rész: *Pro Christo* 8/4 (1943), 7—9.
II. rész: *Pro Christo* 9/3 (1944), 3—5.
23. „Reménytelen eset vagyok?” *Pro Christo* 8/6 (1943), 7—9.
24. (& Surányi János) On the reduction of the decision problem, II: Gödel prefix, a single binary predicate. *J. Symbolic Logic* 12 (1947), 65—73.
25. A számok hatványainak összegéről, I—III.
I. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 5—10.
II. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 39—47.
III. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 169—176.
26. Gyertek, bizonyítsuk be Csebisev tételét! I—III.
I. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 89—90.
II. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 127—128.
III. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 1 (1947—48), 176—182.

⁴¹ A cikk kinyomtatott alakjában tévesen „axiomatikus rendszerig” szerepel.

27. Matematika és dialektikus materializmus. *Magyar Technika* 3 (1948), 100—102.
28. On unsolvable mathematical problems. *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948)*, 1949, 1. kötet, 534—536.
29. Une forme du théorème de Gödel sous des hypothèses minimales. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 229 (1949), 963—965.
30. Quelques formes générales du théorème de Gödel. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 229 (1949), 1047—1049.
31. Bizonyítsuk be Csebisev tételét, I—III.
I. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 2 (1949—50), 7—13.
II. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 2 (1949—50), 90—91.
III. rész: *Középisk. Mat. Lapok* 2 (1949—50), 121—124.
32. (& Surányi János) On the reduction of the decision problem, III: Pepis prefix, a single binary predicate. *J. Symbolic Logic* 15 (1950), 161—173.
33. Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen. *Methodos* 2 (1950), 220—226.
34. Another proof of the Gödel—Rosser incompleteness theorem, *Acta Sci. Math.* 12 (1950), 38—43.
35. Contributions to the reduction theory of the decision problem, I: Prefix $(x_1)(x_2)(Ex_1) \dots (Ex_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1 (1950), 64—73.
36. Über die Cantorsche Theorie der reellen Zahlen. *Publ. Math.* 1 (1950), 150—159.
37. On Cauchy's convergence test. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1 (1950), 109—112.
38. Beszámoló a Béke Hívei II. világkongresszusáról. *Mat. Lapok* 1 (1950), 317—318.
39. Contributions to the reduction theory of the decision problem,⁴² III: Prefix $(x_1)(Ex_1) \dots (Ex_{n-2})(x_{n-1})(x_n)$ a single binary predicate. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 2 (1951), 19—38.
40. Contributions to the reduction theory of the decision problem, IV: Reduction to the case of a finite set of individuals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 2 (1951), 125—142.
41. (& Aczél János & J. G. Mikusiński) Sur l'équation de translation. *Studia Math.* 12 (1951), 112—116.
42. Another proof of the Markov—Post theorem. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 3 (1952), 1—27.
43. A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények. *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 2 (1952), 89—112.
44. Az eldöntéskérdés visszavezetése logikai formulák véges halmazon való kielégíthetőségének kérdésére. *Az I. Magyar Mat. Konv. (Budapest, 1950) Közleményei.*

- 1952, 163—190.
45. A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria hatása az axiomatikus módszer fejlődésére. *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 3 (1953), 235—242.
 46. Az analízis módszerei a középiskolai tanításban, I—IV.
I. rész: *A mat. tanítása* 1 (1953), 22—32.
II. rész: *A mat. tanítása* 1 (1953), 40—50.
III. rész: *A mat. tanítása* 1 (1953), 74—80.
IV. rész: *A mat. tanítása* 1 (1954), 109—112.
 47. L'influence de la géométrie de Bolyai-Lobatchevsky sur le développement de la méthode axiomatique. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* 5 (1954), supplementum, 117—126.
 48. K. Schröter egy, az általános rekurzív függvény fogalmának definíciójára vonatkozó problémájának megoldása. *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 5 (1955), 103—127.
 49. Über ein Problem, betreffend die Definition des Begriffes der allgemein-rekursiven Funktion. *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.* 1 (1955), 93—96.
 50. Az általános algebráról — az algebra és a matematikai logika határterületéről (előadás-kivonat). *Mat. Lapok* 6 (1955), 63—65.
 51. Közvetlen bizonyítás az eldöntéskérdés problémájának általános rekurzív algoritmussal való megoldhatatlanságára. *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 6 (1956), 1—25.

⁴⁴ A cikksorozat második részét Surányi János írta.

52. (& Hajnal András) Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez, I—II.
I. rész: *Mat. Lapok* 7 (1956), 26—42.
II. rész: *Mat. Lapok* 7 (1956), 218—229.
53. (& Hajnal András) An elementary combinatorial theorem with an application to axiomatic set theory. *Publ. Math.* 4 (1956), 431—449.
54. Ein direkter Beweis für die allgemein-rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität, *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.* 2 (1956), 1—14.
55. Об одной гипотезе, применяемой в исследованиях о так называемых неразрешимых арифметических задачах. *Труды Третьего Всесоюзного Математического Съезда (Москва, 1956)*, 1959, 4. kötet, 227—231.
56. A matematikai logikáról. *Magyar Tudomány* 1 (1956), 369—391.
57. Az ún. megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjául szolgáló Church-féle hipotézisről. *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 7 (1957), 19—38.
58. Hozzászólás Tarján Rezső „A gyorsműködésű automatikus számológépek fejlődési iránya” c. előadásához, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 7 (1957), 76—82, 85.
59. Über arithmetische Funktionen von unendlich vielen Variablen, welche an jeder Stelle bloss von einer endlichen Anzahl von Variablen abhängig sind, *Colloq. Math.* 5 (1957), 1—5.
60. A szegedi logikai gép (előadás-kivonat). *Mat. Lapok* 9 (1958), 165.
61. An argument against the plausibility of Church's thesis, *Constructivity in Mathematics (Proc. Coll. Amsterdam, 1957)*, North-Holland, 1959; 72—80.
62. A new principle of construction of logical machines, *2-e Congrès Internat. de Cybernétique (Namur, 1958)*, 458—463.
63. A practical infinitistic computer. *Infinitistic Methods in the Foundations of Mathematics (Proc. Sympos. Warsaw, 1959)*, 1961; 347—362.
64. On a digital computer which can be programmed in a mathematical formula language *A II. Magyar Matematikai Kongresszus (Budapest, 1960)* előadáskivonatai, 5. kötet, 3—16. (Orosz fordításban is megjelent: *Кибернетический Сборник, новая серия* 1 (1965), 215—226.)
65. Néhány, az áramkörök elméletével kapcsolatos gráfelméleti problémáról (előadás-kivonat), *Mat. Lapok* 11 (1960), 211.
66. Einige philosophische Probleme der Kybernetik, *Naturwissenschaft und Philosophie*

- (Internat. Symp. Leipzig, 1960), 381—401.
67. Über einen Rechenautomaten, der eine mathematische Sprache versteht. *Zeitschr. Angew. Math. Mech.* 40 (1960), T, 64—65.
 68. Wissenschaftliche Abstraktion und die Anwendung mathematischer Methoden in Biologie und Medizin. *Arzt und Philosophie*, Berlin, 1960; 132—133, 150, 164.
 69. A tanszékvezetői munka tartalmi kérdései az egyetemen. *Felsőoktatási Szemle* 10 (1961), 573—580.
 70. A contribution to the translation of arithmetical operators (assignment statements) into the machine language of the computer M—3. *Shuxue Jinzhan* 6 (1963), 321—338. (Az angolul írt munka kínai nyelven jelent meg.)
 71. Algorithmische Sprachen und Programmierung von Rechenautomaten. *Mathematische und Physikalisch-Technische Probleme der Kybernetik (Vorträge der Konferenz, Berlin, 1962)*, 1963; 147—176.
 72. Über eine Variante des Neumannschen selbstreproduzierenden Automaten. *Mathematische und Physikalisch-Technische Probleme der Kybernetik (Vorträge der Konferenz, Berlin, 1962)*, 1963; 522—528.
 73. A kvalitatív információelmélet problémái. *A Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 12 (1962), 293—301.
 74. Über eine erkenntnistheoretische Wurzel des „Anti-Kybernetismus“. *Kybernetik in Wissenschaft*, Berlin, 1962; 53—56.
 75. „Sejts és bizonyítsál!”? *Magyar Tudomány* 8 (1963), 816—823.
 76. Matematikai és nyelvi struktúrák, *Általános nyelvészeti tanulmányok, II.* Budapest, 1964; 11—74, 166—172, 295—304.

77. On the problem of the foundation of our knowledge, *The Foundation of Statements and Decisions*, Warsaw, 1965; 13—19.
78. Les calculatrices automatiques comme structures algébriques, *Prévisions, Calcul et Réalités*, Paris, 1965 9—22.
79. О вложении теории автоматических цифровых вычислительных машин в алгебраическую теорию автоматов Мура, Мили и Глушкова, *Теория Конечных и Вероятностных Автоматов*, Москва 1965; 93—99. (E munka rövid kivonata: On the algebraic theory of automatic digital computers. *Colloquium on the Foundations of Mathematics, Mathematical Machines and their Applications (Tihany, 11—15 September 1962)*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965; 129.)
80. Un modèle algébrique de calculatrice *Électronique Troisième Congrès de Calcul et de Traitement de l'Information (Toulouse, 1963)*, Paris, 1965; 381—387.
81. Foundations of mathematics—whither now? *Problems in the Philosophy of Mathematics*, (Proc. Coll. London, 1965), North-Holland, Amsterdam, 1967; 187—207.
82. A matematikai nyelvészet eredményei a nyelvoktatásban. *Modern Nyelvoktatás* 5 (1967), 25—29.
83. Meaning, synonymy and translation. *Comput. Linguist.* 6 (1967), 27—39.
84. Le langage comme structure algébrique. *Cahiers Linguist. Théor. Appl.* 4 (1967), 73—82.
85. (& Obál Ferenc & Madarász István & Muszka Dániel & Such György) Cybernetical model of the regulation of the homeostasis of the organism. *Abstracts of First Joint Congr. of Hung. Societies of Biochem. Biophys. and Physiol. (Pécs, 1967)*, Budapest, 1967, 42.
86. R. Péter's work in the theory of recursive functions. *Les fonctions récursives et leurs applications (Coll. Internat. Tihany, 1967)*, 1969; 1—11.
87. Pattern recognition and conditional reflexes (general problems). *5-e Congrès Internat. de Cybernétique (Namur, 1967)*, 1968; 136—140.
88. Значение, синонимия и перевод. *Разработка Машинных (Автоматических) Систем Перевода с Одного Языка на Другой и их Применение*, Budapest, 1967; 374—390.
89. On the problem of full utilization of the technical possibilities of computers in devising appropriate approximation methods for the solution of numerical problems. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie* 12/2 (1968), 75—79.
90. A programozási nyelvekkel kapcsolatos további teendők. *Információ és Elektronika* 4 (1968), 251—254.
91. Digitális számológépek és céljének alkalmazása az orvosi diagnosztikában. *Orvos és*

- Technika* 7 (1969), 14—18.
92. Bevezetés a kibernetikába. *A TIT Fiz. Kém. Mat. Szakosztályának Tájékoztatója* 15 (1969), 55—71.
 93. An intuitive representation of context-free languages. *Internat. Conf. Comput. Linguist.* Stockholm, 1969. Preprint 66. (10 oldal).
 94. A kibernetikáról. *Fiz. Szemle* 20 (1970), 129—134.
 95. Ist ALGOL wirklich eine algorithmische Sprache? *Automatentheorie und Formale Sprachen (Tagung, Oberwolfach, 1969)*, 1970; 305—315.
 96. „Fahndiagramme” — ein anschauliches Hilfsmittel zur Angabe von Programmiersprachen. *Formale Sprachen und Programmiersprachen. (Tagung, Oberwolfach, 1971)*.
 97. An algebraic model of systems of digital computers. *Internat. Symp. and Summer School on Math. Foundations of Computer Sci.* Warsaw, Jablonna, 1972; 1—12.
 98. A számítástechnikai szakemberképzés problémái a tudományegyetemen. *Felsőoktatási Szemle* 21 (1972), 548—552.
 99. (riporter: Horányi Özséb) Beszélgetés a matematikáról. *Természet Világa* 103 (1972), 351—356.
 100. On a measure of divergence of a context-free language from finite state languages. *Recueil Linguist. de Bratislava IV., Proc. Symp. Algebraic Linguist. (Smolenice, 1970)*, 1973; 93—106.
 101. Az elektronikus digitális számítógépek eddigi fejlődése és a várható fejlődés fő irányai. (Kalmár szerkesztésében 1972-ben a MTA Természettudományi I. Főosztálya megbízásából készült tanulmány. Munkatársak: Hunya Péter, Kertész Ádám, Quittner Pál, Sára Attila, Székely Sándor.) 1—70.

87

102. Belső gépi nyelvek, beleértve a magasszintű nyelveket.⁴³ (Kalmár szerkesztésében 1973-ban a MTA Természettudományi I. Főosztálya megbízásából készült tanulmány. Munkatársak: Gyurkovics Éva, Hunya Péter, Komor Tamás, Makay Árpád, Muszka Dániel, Révész György, Sára Attila, Simon Endre, Székely Sándor, Varga Antal, Varga Tibor.) 1—140.
103. A számítástechnikai szakemberképzés problémái. *A számítástechnikai oktatás a hazai felsőoktatási intézményekben (Konferencia, Visegrád, 1974)*, Budapest, 1974. 25—30.
104. Géptől független szemlélet kialakítása a programtervezők oktatásában. *A számítástechnikai oktatás a hazai felsőoktatási intézményekben. (Konferencia, Visegrád, 1974)*, 142—146.
105. (riporter: N. Sándor László) A pedagógus a számítógépek korában. *Köznevelés* 30/20 (1974), 3—5.
106. An alternative of the stack-like memory of a computer. (Egy Turkuban rendezett konferenciára szánt előadás. E posztumusz munkát Makay Árpád öntötte formába.)
107. *Bevezetés a matematikai analízisbe, I—II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. (442 + 406 oldal). (Sajtó alá rendezték: Tandori Károly mint szerkesztő; Csúri Józsefné Paár Piroska, Dúró Lajosné Lévy Rozália, Németh József, Varga Antal.)

(B)

1. Kalmár László. *Magyar Életrajzi Lexikon, III.* Akadémiai Kiadó Budapest, 1981; 359.
2. László Kalmár *Acta Cybernet.* 3 (1976), 1.
3. László Kalmár *Acta Sci. Math.* 38 (1976), 221—222.
4. Kalmár László *Alkalmazott Mat. Lapok* 2 (1976), 151—155.
5. Kalmár László *Információ és Elektronika* 11 (1976), 163.
6. László Kalmár *Problems of Control and Information Theory* 6 (1977), 91—92.
7. Kalmár László *Tiszatáj* 30/9 (1976), 112.
8. Ádám András: Kalmár László matematikai munkásságáról. *Mat. Lapok* 26 (1975), 1—10.
9. Arató Mátyás: The work of Academician László Kalmár in the field of computer science. *Acta Cybernet.* 2 (1975), 179—181.
10. Császár Ákos: Kalmár László. *Mat. Lapok* 25 (1974), 251—252.

11. Erdős Pál: Néhány személyes és matematikai emlékem Kalmár Lászlóról. *Mat. Lapok* 25 (1974), 253—255.
12. Kardos István: Kalmár László (1970-ben készült tévé-riport). *Sokszemközt — tudósokkal*, MRT—Minerva, Budapest, 1974; 197—208.
13. Péter Rózsa: Kalmár László matematikai munkássága. *Mat. Lapok* 6 (1955), 138—150.
14. Péter Rózsa: Kalmár Lászlónkról. *Magyar Tudomány* 21 (1976), 729—732.
15. Péter Rózsa: László Kalmár. *Elektrotechnische Informationsverarbeitung und Kybernetik* 14 (1978), 3—4.
16. [Vácsov] Д. Вачов: [Kalmár László akadémikus (bolgár nyelvű nekrológ)], *Физ.—Мат. Спир. Българ. Акад. Наук* 20 (1977), 177—178.

(C)

1. W. Ackermann: *Solvable cases of the decision problem*. North-Holland, Amsterdam, 1954.
2. Ádám András: Neumann János. *Műszaki Nagyjaink, IV*, Budapest, 1981; 279—304.

⁴³ Külön megemlíjtjük e munka 3. fejezetét és függelékét. Címük: „Javaslatok a Kalmár-féle formulavezérlésű számítógép korszerű alakjának megtervezésére, különös tekintettel a belső nyelvre”, „Az FCCL—4 programozási nyelv szintaxisa”.

3. E. Cesàro: *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung*. Teubner, Leipzig, 1904.
4. Egerváry Jenő: A differenciálokról. *Mat. Lapok* 8 (1957), 79—85.
5. Gécseg Ferenc: О многотактных автоматах. *Acta Sci. Math.* 28 (1967), 55—59.
6. D. Hilbert és P. Bernays: *Grundlagen der Mathematik, I—II*. Második kiadás, Springer, Berlin, 1968 és 1970.
7. E. Landau: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I—II*. Teubner, Leipzig, 1909.
8. E. Landau: *Grundlagen der Analysis*. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.
9. Péter Rózsa: Rekursivität und Konstruktivität. *Constructivity in Mathematics (Proc. Coll. Amsterdam, 1957)*, North-Holland, 1959; 226—233.
10. Pólya György és Szegő Gábor: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I—II*. Springer, Berlin, 1925. — Magyar kiadás: *Feladatok és tételek az analízis köréből, I—II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980 és 1981.
11. Surányi János: *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.
12. Szénássy Barna: König Gyula. *Műszaki Nagyjaink, III*, Budapest, 1967; 203—239.

